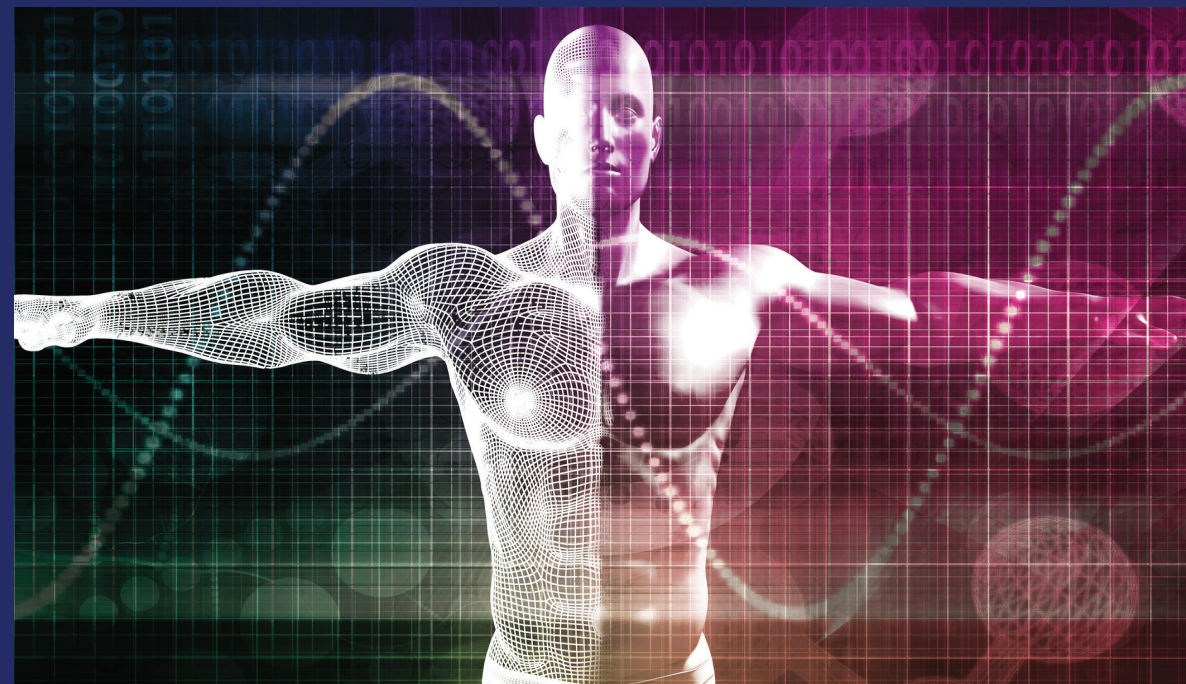


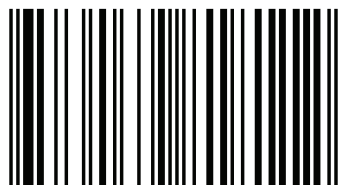
Учебно-методическое пособие оформлено в виде конспекта лекций. В нем даются теоретические представления об основных радиофизических методах обработки и анализа сигналов, применяемых в биофизике и медицине. В пособии даны базовые определения, представлены основные формулы и обсуждаются особенности практического использования методов. В приложении приведен список практических заданий. В представленных заданиях предлагается реализовать методы, изученные в теоретической части курса, в виде компьютерных программ и протестировать работоспособность созданных программ в ходе обработки прилагаемых тестовых данных.



Антон Киселев
Анатолий Караваев
Владимир Гриднев

Киселев Антон Робертovich, д-р мед. наук, профессор СГУ имени Н.Г.Чернышевского. Караваев Анатолий Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, доцент СГУ имени Н.Г.Чернышевского. Гриднев Владимир Иванович, д-р мед. наук, профессор СГУ имени Н.Г.Чернышевского.

Радиофизические методы анализа сигналов в биофизике и медицине



978-613-9-81811-2

LAP **LAMBERT**
Academic Publishing

**Антон Киселев
Анатолий Караваев
Владимир Гриднев**

**Радиофизические методы анализа сигналов в биофизике и
медицине**

**Антон Киселев
Анатолий Караваев
Владимир Гриднев**

**Радиофизические методы анализа
сигналов в биофизике и медицине**

LAP LAMBERT Academic Publishing RU

Imprint

Any brand names and product names mentioned in this book are subject to trademark, brand or patent protection and are trademarks or registered trademarks of their respective holders. The use of brand names, product names, common names, trade names, product descriptions etc. even without a particular marking in this work is in no way to be construed to mean that such names may be regarded as unrestricted in respect of trademark and brand protection legislation and could thus be used by anyone.

Cover image: www.ingimage.com

Publisher:

LAP LAMBERT Academic Publishing

is a trademark of

International Book Market Service Ltd., member of OmniScriptum Publishing Group

17 Meldrum Street, Beau Bassin 71504, Mauritius

Printed at: see last page

ISBN: 978-613-9-81811-2

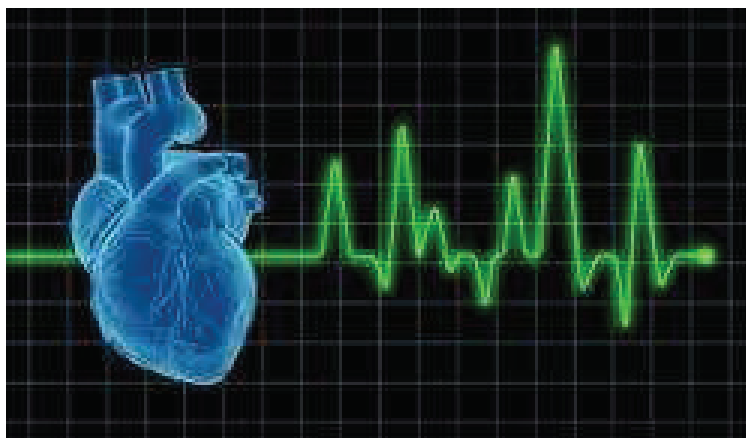
Copyright © Антон Киселев, Анатолий Караваев, Владимир Гриднев

Copyright © 2018 International Book Market Service Ltd., member of

OmniScriptum Publishing Group

All rights reserved. Beau Bassin 2018

КИСЕЛЕВ А.Р., КАРАБАЕВ А.С., ГРИДНЕВ В.И.



УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

**Использование радиофизических методов
обработки и анализа сигналов в биофизике и
медицине**

Киселев Антон Робертович, докт. мед. наук, профессор кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии факультета нано- и биомедицинских технологий Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского.
E-mail: kiselev@cardio-it.ru

Караваев Анатолий Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии факультета нано- и биомедицинских технологий Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского.
E-mail: karavaevas@gmail.com

Гриднев Владимир Иванович, докт. мед. наук, профессор кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии факультета нано- и биомедицинских технологий Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского.
E-mail: gridnev@cardio-it.ru

Рецензент: докт. физ.-мат. наук Е.П. Селезнев.

© А.Р. Киселев, А.С. Караваев, В.И. Гриднев, 2018

Учебно-методическое пособие оформлено в виде конспекта лекций. В нем даются теоретические представления об основных радиофизических методах обработки и анализа сигналов, применяемых в биофизике и медицине. В пособие даны базовые определения, представлены основные формулы и обсуждаются особенности практического использования методов.

В приложении приведен список практических заданий. В представленных заданиях предлагается реализовать методы, изученные в теоретической части курса, в виде компьютерных программ и протестировать работоспособность созданных программ в ходе обработки прилагаемых тестовых данных.

Оглавление

Оглавление	3
Лекция 1. Введение в методы обработки временных рядов	5
Рекомендуемая литература.	5
Области науки и техники, использующие ЦОС	5
Специфика обработки сигналов в реальном времени	5
Основные термины и понятия	7
Оценка по сигналам математического ожидания и дисперсии	9
Лекция 2. Корреляционный анализ	10
Корреляция и ковариация	11
Свойства ковариационных и корреляционных функций	12
Примеры использования автокорреляции	12
Пример расчета коэффициента корреляции	14
Применение взаимных корреляционных функций	16
Лекция 3. Преобразование Фурье	18
Жан Батист Фурье	18
Преобразование Фурье	18
Некоторые свойства преобразования Фурье	19
Дискретное преобразование Фурье	19
Вычисление ДПФ	20
Пример расчета ДПФ	22
Лекция 4. Особенности использования ДПФ	24
Вычислительная сложность ДПФ. Быстрое преобразование Фурье	24
Эффект подмены частот	25
Эффект утечки и борьба с ним	26
Лекция 5. Расчет спектров мощности	32
Расчет спектров мощности.	32
Вычисление спектров мощности методами Даньелла и Уэлча	33
Использование логарифмического масштаба. Децибел.	34
Лекция 6. Разделение сигналов в частотной области. Свертка	37
Разделение сигналов в частотной области	37
Свертка	40
Свойства свертки	42
Лекция 7. Основные понятия теории дискретных линейных систем	42
Основные понятия теории дискретных линейных систем	42
Цифровые фильтры	43
Типы цифровых фильтров	44
Структурные схемы фильтров	45
Z-преобразование	46
Свойства z-преобразования	47
Лекция 8. Передаточная функция и частотные характеристики	48

Решение разностных уравнений	48
Передаточная функция	49
Связь передаточной функции с импульсной характеристикой	49
Соединение фильтров и их структурные схемы	50
Критерий устойчивости	51
Частотные характеристики	52
Нормировка частоты	52
Лекция 9. Методы синтеза цифровых фильтров	53
Этапы разработки ЦФ	53
КИХ-фильтры с линейной фазовой характеристикой	54
Расчет КИХ-фильтра методом взвешивания	55
Алгоритм реализации метода взвешивания	56
Пример расчета фильтра с помощью метода взвешивания	57
Расчет БИХ-фильтра методом размещения нулей и полюсов	58
Пример расчета режекторного БИХ-фильтра	61
Приложение: тексты заданий для практических занятий по курсу	63
Практическое занятие 1 (по материалам лекции 1)	63
Практическое занятие 2 (по материалам лекции 2)	64
Практическое занятие 3 (по материалам лекции 3)	64
Практическое занятие 4 (по материалам лекции 3, 4)	65
Практическое занятие 5 (по материалам лекций 3-5)	65
Практическое занятие 6 (по материалам лекций 3, 6)	66
Практическое занятие 7 (по материалам лекции 7)	67
Практическое занятие 8 (по материалам лекций 3, 8)	67
Практическое занятие 9 (по материалам лекций 3-6, 8, 9)	67
Список используемых сокращений	68
Использованные литературные источники	69

Лекция 1. Введение в методы обработки временных рядов

Рекомендуемая литература. Области науки и техники, использующие ЦОС. Задачи, решаемые с помощью ЦОС. Специфика обработки сигналов в реальном времени. Основные термины и понятия. Оценка по сигналам математического ожидания и дисперсии.

Курс «Методы обработки временных рядов» представляет собой, введение в *цифровую обработку сигналов (ЦОС, DSP, Digital Signal Processing)*, адаптирующую и применяющую методы статистики и математического моделирования для решения широкого круга задач, связанных с обработкой сигналов различной природы.

Рекомендуемая литература

Используемые при подготовке данного курса лекций источники указаны в списке литературы. В первую очередь следует обратить внимание на следующие пять:

№	Источник	Комментарий
1.	Сато Ю. Обработка сигналов. Первое знакомство. Омск: «Додека», 2001. –175 с.	Основные понятия и линейные характеристики ЦОС изложены в максимально доступной форме.
2.	Хованов И.А., Хованова Н.А. Методы обработки временных рядов. Учебное пособие. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2001. – 120 с.	В весьма доступной форме изложены многие вопросы ЦОС. Упомянуты нелинейные методы.
3.	Айфичер Э. Джервис Б. Цифровая обработка сигналов. Практический подход. 2-е издание. Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 992 с.	В книге подробно рассматривается большинство разделов ЦОС. Приводится масса подробных примеров.
4.	Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов. М.: «Радио и связь», 1990. – 256 с.	Широкий охват тематики ЦОС. Некоторые сложные разделы, например, применение z-преобразования для расчета систем ЦОС, изложены в доступной форме.
5.	Безручко Б.П., Смирнов Д.А. Математическое моделирование и хаотические временные ряды. Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2005. – 319 С.	Монография посвящена применению нелинейных методов математического моделирования.

Области науки и техники, использующие ЦОС

На протяжении ряда последних лет ЦОС оказывает огромное влияние и широко внедряется в ведущие отрасли науки и техники, включая: телекоммуникации, биомедицинские приложения, управление и контроль технологическими процессами на производствах, в системах автоматического управления и контроля военного назначения и др. В настоящее время, ЦОС является одним из основных курсов в странах Европы и в США на специальностях, связанных с техникой связи, вычислительной и электронной техникой, биомедицинской инженерией, а также с автоматизацией производств и технологических процессов.

Специфика обработки сигналов в реальном времени

Многие приложения, использующие ЦОС, подразумевают ее реализацию в *реальном времени (real-time processing)*, в отличие от *постобработки (post processing)*. Такая реализация означает, что принципиальным фактором при решении задачи обработки

данных является ограничение времени, которое допустимо затрачивать на обработку одного набора входных данных, кроме того, подразумевается, что весь набор данных сразу недоступен и новые данные постоянно поступают для обработки.

Одним из примером обработки реального времени может служить ЦОС, реализуемая в *кардиомониторах* – устройствах, позволяющих в автоматическом режиме длительное время (многие сутки) непрерывно контролировать наиболее важные параметры деятельности ССС. Такие устройства, непрерывно регистрируют временной ряд ЭКГ и постоянно оценивают с помощью специализированных алгоритмов ЦОС частоту сердечных сокращений пациента. В случае, если эта частота оказывается ниже или выше допустимых значений, подается предупреждающий сигнал, оповещающий персонал о необходимости срочного медицинского вмешательства. Чем раньше будет диагностировано нарушение ритма сердца, тем более эффективно врачебное вмешательство. Поэтому, весь цикл, включающий выборку набора входных значений сигнала ЭКГ, их обработки и при необходимости, оповещение персонала должен занимать единицы секунд.

Другой пример – управление впрыском топлива в инжекторных двигателях автомобилей. Здесь на основе результатов анализа сигналов, получаемых с различных датчиков (давление внутри двигателя, его температура, скорость вращения ведущего вала и др.), бортовой компьютер автомобиля выбирает параметры инъекции топлива. Скорость обработки информации с датчиков непосредственно определяет, насколько быстро отреагирует система управления впрыском на изменение характера движения, что определяет экономичность, мощность и КПД двигателя.

Типичным примером использования цифровой постобработки информации являются редакторы аудиофайлов и графические редакторы персональных компьютеров. Здесь, в отличие от примеров, представленных выше, сразу доступен ВЕСЬ предварительно записанный цифровой сигнал (фотография или рисунок). Графический редактор позволяет применять методы ЦОС сразу ко всему изображению (например, автоматически корректировать цвета), причем обработка может занять достаточно длительное и что наиболее важно, заранее неизвестное время. Это время может зависеть, например, от сложности рисунка, мощности центрального процессора ЭВМ, объема и быстродействия оперативной памяти, степени загрузки процессора другими задачами и т.п.

Для достижения наибольшей эффективности, т.е. наибольшей точности, быстродействия и надежности при наименьшей стоимости, массе и габаритах, при реализации систем ЦОС реального времени часто отказываются от использования персональных компьютеров и используют т.н. *промышленные компьютеры*. Обычно, они работают под управлением *ОС жесткого времени*, которые в режиме многозадачности гарантируют величину кванта времени, выделяемого для выполнения кода каждого исполняемого процесса. Другим распространенным решением является использование специализированных интегральных микросхем: *программируемых логических интегральных схем – ПЛИС (Field Programmable Gates Array - FPGA), микроконтроллеров (microcontroller, μ Controller), цифровых сигнальных процессоров (ЦСП, Digital Signal Processor, DSP)*. Последние, представляющие, по сути, ЭВМ, реализованные внутри одной микросхемы. Благодаря малым габаритам и энергопотреблению, низкой цене и достаточно широким возможностям в настоящее время они получили широкое распространение.

Для достижения наибольшей эффективности систем ЦОС реального времени при программировании этих систем, зачастую, используют язык ассемблера, ориентированный на особенности архитектуры конкретной ЭВМ. Типичен в этом случае отказ от современных, широко признанных технологий программирования: *Rapid Application Development - RAD*, ООП. При этом существенно возростла нагрузка на разработчика, который, кроме навыков программиста должен свободно владеть

современными методами ЦОС и обладать знаниями в области цифровой и аналоговой схемотехники, специализированного аппаратного обеспечения.

Специалисты такого профиля являются, в настоящее время, наиболее востребованными на рынке труда технических специальностей во всех развитых странах мира.

Основные термины и понятия

Под *сигналом* будем понимать изменение во времени и/или в пространстве некоторой физической величины, несущее информацию.

Далее будем рассматривать случай изменения наблюдаемой величины только во времени.

Датчиком называют устройство, преобразующее измеряемую физическую величину в сигнал электрического напряжения или тока. Примеры: термопара - датчик температуры, фотодиод – датчик освещенности, оптопара - датчика кровенаполнения и др.

Аналоговыми сигналами называют электрические сигналы непрерывные как во времени, так и по значению. Такие сигналы наиболее широко распространены в природе и технике. Примерами являются: изменение во времени интенсивности солнечного излучения, напряжение на выходе радиотехнического генератора, температура воздуха в выбранной точке и др.

Дискретными называют сигналы непрерывные во времени, но способные принимать только конечный набор значений. Типичным примером является численность популяции животных.

Отсчетом (выборка, sample) называют значение наблюдаемой величины, измеренное в дискретный момент времени.

Цифровыми сигналами (*digital signal, реализация, временной ряд, time series*) называют наборы дискретнозначных выборок. Только такое представление экспериментальных данных позволяет использовать все возможности современных ЭВМ для хранения, обработки и удобного представления данных.

Эквидистантными называют временные ряды, у которых интервалы между последовательными выборками одинаковы.

Временем выборки (sampling time, sampling interval) называют время между последовательными отсчетами. Для эквидистантных рядов время выборки является постоянной величиной.

Частотой дискретизации (частота квантования, частота выборки, sampling frequency, sampling rate) называют величину обратную времени выборки. Единицы измерения $[Гц]=[с^{-1}]$.

На практике временные ряды получают из аналоговых экспериментальных сигналов с помощью специальных устройств: *аналого-цифровых преобразователей (АЦП, ADC=analog to digital converter)*. АЦП осуществляет две операции: *дискретизацию по времени*, т.е. выборку значений наблюдаемой с заданной частотой и *квантование по амплитуде*. Последняя операция означает, что АЦП разбивает некоторый диапазон входных значений сигнала (тока или напряжения) на конечный набор равных интервалов, каждому из которых ставится в соответствие целочисленный код значение которого, обычно, линейно зависит от амплитуды входного сигнала рис. 1.1.

Основными характеристиками АЦП являются *разрядность* и *максимальная частота дискретизации*, часто являющиеся конкурирующими характеристиками. Разрядность АЦП определяет количество интервалов, на который разбивается рассматриваемый диапазон изменений наблюдаемой. Например, 8-ми разрядное (8-ми битное) АЦП “делит” диапазон измерений на $2^8=256$ интервалов, а 12-ти разрядное на $2^{12}=4096$. Типичными значениями разрядности, в настоящее время, являются: 8-12 бит для АЦП нижней ценовой категории (или для высокочастотных АЦП), 12-20 бит в средней ценовой категории, АЦП с разрядностью 20-24 бит часто относят к прецизионным.

Частота квантования обычно может принимать для каждого устройства несколько дискретных значений от 0 до максимальной частоты выборки, а максимальная частота дискретизации может для разных устройств варьироваться в широких пределах от сотен Гц до единиц ГГц. Типичные диапазоны входных значений для АЦП, измеряющих напряжение, от долей вольта до десятков вольт, обычно, каждое устройство АЦП позволяет выбирать диапазон из нескольких вариантов. Очевидно, что чем выше частота дискретизации и разрядность, тем меньше АЦП искажает форму измеряемого сигнала.

Специфические искажения измеряемого сигнала (появление “ступенек”), вносимые аналого-цифровым преобразованием называют **шумом дискретизации**.

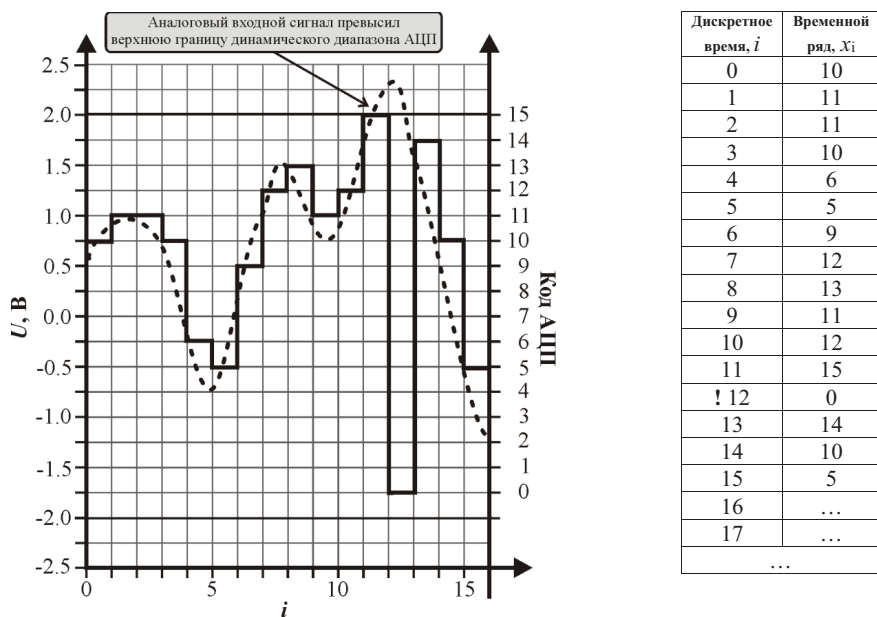


Рис. 1.1 Оцифровка участка сигнала с помощью 4 битного АЦП. Диапазон корректно измеряемых напряжений (динамический диапазон АЦП) (± 2.0 В) разбит на $2^4=16$ интервалов (“квантов”). На выборке $i=12$, (в таблице помечена знаком ‘!’) входной сигнал превысил 2.0 В – максимальное значение, которое может измерить используемое АЦП, поэтому, преобразователь сгенерировал код 0. Входной аналоговый сигнал показан пунктиром, дискретный временной ряд на выходе АЦП изображен жирной сплошной линией.

Цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП, digital to analog converter, DAC) осуществляет обратную, по отношению к АЦП, операцию, преобразуя цифровой временной ряд в аналоговый сигнал напряжения. Основными параметрами ЦАП также являются разрядность и максимальная частота дискретизации. Блок-схема типичной контрольно-измерительной системы представлена на рис. 2.1.

Стационарным сигналом (стационарным в широком смысле сигналом) называют сигнал, статистические характеристики которого (среднее, дисперсия, функция плотности распределения вероятностей и пр.) не изменяются во времени.

Состоятельной оценкой по временному ряду некоторой характеристики будем называть оценку, приближающуюся к истинному значению этой характеристики при увеличении длины реализации.

Далее, если специально не оговорено, будем предполагать, что временной ряд наблюдаемой нами уже получен.

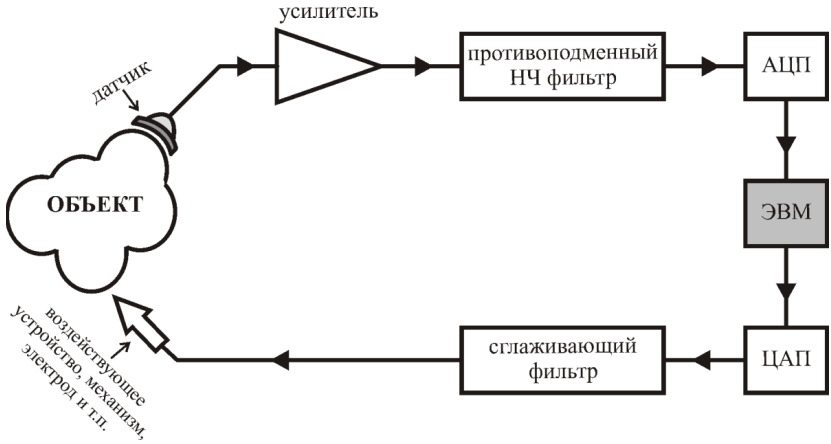


Рис. 1.2 Типичная структурная схема контрольно-измерительной системы на основе ЦОС.

Оценка по сигналам математического ожидания и дисперсии

Нужно понимать, что т.к. на практике всегда имеют дело с временными рядами конечной длины, частота дискретизация и разрядность квантования также конечны, а измеряемый сигнал почти всегда подвержен действию шумов и помех различной природы, то имеет смысл говорить об **ОЦЕНКЕ** по временному ряду интересующей величины, **БЕСКОНЕЧНОЙ ТОЧНОСТИ** расчетов достигнуть **НЕВОЗМОЖНО**. Иногда (не всегда) можно говорить лишь о достижении **ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТИ**. О полученной по данным оценке заранее почти никогда нельзя сказать, насколько она точна, хотя часто можно утверждать, что оценка, полученная одним способом, точнее, чем другим. Для того, чтобы подчеркнуть, что осуществляется эмпирическая (экспериментальная) оценка некоторой величины по данным, над обозначением этой величины будем ставить символ “^”.

Математическое ожидание:

$$M_x = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx, \quad (1.1)$$

имеет смысл среднего значения, а **дисперсия**:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)^2 p(x)dx, \quad (1.2)$$

где $p(x)$ - плотность вероятности, характеризует разброс значений временного ряда относительно среднего.

Оценить эти величины по временным рядам кажется не сложным, однако на практике даже при расчете этих характеристик иногда возникают неожиданные проблемы. Кроме того, $p(x)$, обычно, неизвестна, поэтому, непосредственное использование формул (1) и (2) затруднено.

Для оценки математического ожидания M_x по участку временного ряда длины N : $\{x_i\}_{i=0}^{N-1}$ часто пользуются формулой:

$$\hat{M}_x = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i. \quad (1.3)$$

При этом \hat{M}_x называют “эмпирическое среднее”.

При вычислениях с помощью ЭВМ такой способ оценки среднего может привести к потере точности результата из-за переполнения переменной, хранящей накапливаемую сумму. Например, эффект переполнения переменной будет иметь место при попытке рассчитать среднее последовательности {100, 20, 150, 10}, накапливая сумму в целочисленной переменной размера 1 байт, которая может содержать лишь значения в диапазоне от 0 до 255. Для решения этой проблемы используют подход, основанный на последовательном вычислении частичных сумм:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i^1 &= (x_{2i} + x_{2i+1})/2, i = \overline{0, N/2-1}, i \in Z, \\ \bar{x}_i^2 &= (\bar{x}_{2i}^1 + \bar{x}_{2i+1}^1)/2, i = \overline{0, N/4-1}, i \in Z, \\ &\dots \\ \hat{M}_x = \bar{x}_0^m &= (\bar{x}_0^{m-1} + \bar{x}_1^{m-1})/2, \text{ где } N=2^m, m \in Z. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Дополнительные преимущества последний подход дает в случае, если стоит задача оценки среднего в скользящих перекрывающихся окнах.

Эмпирическую дисперсию обычно оценивают, пользуясь формулой:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - \bar{x})^2. \quad (1.5)$$

Наряду с дисперсией часто пользуются такой характеристикой, как *среднеквадратическое отклонение*:

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{\hat{\sigma}_x^2}. \quad (1.6)$$

Лекция 2. Корреляционный анализ

Корреляция и ковариация. Свойства ковариационных и корреляционных функций. Примеры использования автокорреляции. Пример расчета коэффициента корреляции. Применение взаимных корреляционных функций.

Корреляционный анализ занимает в ЦОС значительное место, позволяя решать целый ряд задач. В первую очередь это сравнение двух сигналов - мера “похожести”, например, при анализе изображений. Автокорреляция является полезной количественной характеристикой статистических свойств сигнала. В ряде случаев оценка степени корреляции позволяет выявлять наличие связей между порождающими сигналами системами, определять временной сдвиг между сигналами. Этот инструмент используется в биомедицинских приложениях, климатологии, цифровой связи, системах автоматического управления (САУ) и т.п. Корреляционный анализ применяется при обработке изображений, например, в системах компьютерного зрения при спутниковых наблюдениях, в радарх и гидроакустических зондах для дальнометрии и пеленгации, в которых сопоставляются излученный и отраженный сигналы, используется для выделения зашумленных сигналов.

Корреляция и ковариация

Рассмотрим временные реализации двух независимых равномерно распределенных случайных процессов с нулевыми средними: $X = \{x_i\}_{i=0}^{N-1}$ и $Y = \{y_i\}_{i=0}^{N-1}$ и вычислим сумму попарных произведений выборки:

$$S = \sum_{i=0}^{N-1} x_i y_i = x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_{N-1} y_{N-1}. \quad (2.1)$$

Так как положительные и отрицательные числа равновероятны, то слагаемые компенсируют друг друга и $S \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$. В случае наличия между X и Y некоторых зависимостей, например, в случае существования связей между системами, порождающими эти процессы, последнее утверждение несправедливо и сумма будет отлична от 0.

Таким образом, сумма вида (2.1) может использоваться для выявления зависимостей между процессами. На практике, для удобства, формулу (2.1) обычно нормируют на длину ряда. Часто оказывается полезным учитывать временную задержку между сигналами. Тогда (2.1) преобразуется к виду:

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{N - \tau} \sum_{i=0}^{N-\tau-1} x_i y_{i+\tau}. \quad (2.2)$$

Мера зависимости (“похожести”) сигналов $\hat{R}_{xy}(\tau)$ называется **ковариацией** сигналов X и Y. В случае если исследуемые сигналы имеют ненулевое среднее, оказывается удобнее использовать **корреляцию**, оперирующую с сигналами, приведенными к нулевому среднему:

$$\hat{C}_{xy}(\tau) = \frac{1}{N - \tau} \sum_{i=0}^{N-\tau-1} (x_i - \bar{x})(y_{i+\tau} - \bar{y}). \quad (2.3)$$

В непрерывном времени ковариацию и корреляцию определяют так:

$$R_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x y p(x, y) dx dy \quad (2.4)$$

$$C_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_x)(y - M_y) p(x, y) dx dy. \quad (2.5)$$

Формулы (2.4) и (2.5) на практике почти никогда не используются, т.к. обычно неизвестна совместная плотность вероятности $p(x, y)$.

Удобным оказывается использование т.н. **коэффициента корреляции**, представляющего собой нормировку корреляционной функции на дисперсии сигналов:

$$\hat{c}_{xy}(\tau) = \frac{\hat{C}_{xy}(\tau)}{\sqrt{\hat{\sigma}_x^2 \hat{\sigma}_y^2}}. \quad (2.6)$$

Коэффициент корреляции может принимать значения из сегмента $[-1, 1]$. Он достигает **+1** при наличии линейной связи между X и Y (например, если $x_i = 0.1y_{i+5}$, то $\hat{c}_{xy}(\tau=5) = 1$) и равен **-1**, когда сигналы линейно связаны и находятся в противофазе (например, если $x_i = -23.5y_i$, то $\hat{c}_{xy}(\tau=0) = -1$). Для несвязанных сигналов, например, когда X и Y независимые случайные процессы, $\hat{c}_{xy}(\tau) = 0, \forall \tau$. В остальных случаях коэффициент корреляции принимает промежуточные значения (например, при $x_i = f(y_i)$, где функция f нелинейная).

Весьма полезная информация может быть получена в ходе оценки корреляций по **унивариантным** данным, т.е. по единственному сигналу. В этом случае, сигнал X сопоставляется со своей копией, сдвинутой во времени на τ . Характеристики \hat{R}_{xx} и \hat{C}_{xx} , носят названия **автоковариации** и **автокорреляции**, соответственно, а \hat{c}_{xx} называют **коэффициентом автокорреляции**. Зависимость коэффициента автокорреляции от сдвига: $\hat{c}_{xx}(\tau)$ называют **автокорреляционной функцией (АКФ)**. Чтобы подчеркнуть отличие индивидуальных характеристик сигнала от показателей, характеризующих взаимосвязь двух сигналов, характеристики \hat{R}_{xy} и \hat{C}_{xy} называют еще **крос-** или **взаимной**

ковариацией и корреляцией соответственно. По аналогии, $\hat{c}_{xy}(\tau)$ называют кросскорреляционной функцией (ККФ).

Свойства ковариационных и корреляционных функций

№	Автокорреляция	Кросскорреляция
1.	При $\tau=0$: автоковариационная функция имеет смысл оценки средней энергии сигнала, в смысле: $\hat{R}_{xx}(\tau=0) = \hat{E}_x = \langle x^2 \rangle$, автокорреляционная функция: $\hat{C}_{xx}(\tau=0) = \hat{\sigma}_x^2$, коэффициент корреляции: $\hat{c}_{xx}(\tau=0) = 1$.	Значения взаимных ковариационной и корреляционной функции при $\tau=0$ не имеют энергетической интерпретации. Для них справедливо: $\hat{R}_{xy}(0) = \hat{R}_{yx}(0)$, $\hat{C}_{xy}(0) = \hat{C}_{yx}(0)$, $\hat{c}_{xy}(0) = \hat{c}_{yx}(0)$.
2.	Четность: $\hat{R}_{xx}(\tau) = \hat{R}_{xx}(-\tau)$, $\hat{C}_{xx}(\tau) = \hat{C}_{xx}(-\tau)$, $\hat{c}_{xx}(\tau) = \hat{c}_{xx}(-\tau)$. Т.е. эти функции симметричны, относительно $\tau=0$ и при их расчете достаточно рассчитывать их значения только при $\tau \geq 0$.	В общем случае, кроссковариационные и кросскорреляционные функции четностью не обладают, т.е. необходимо осуществлять их расчет и для положительных и для отрицательных τ . Существует симметрия вида: $\hat{R}_{xy}(\tau) = \hat{R}_{yx}(-\tau)$, $\hat{C}_{xy}(\tau) = \hat{C}_{yx}(-\tau)$, $\hat{c}_{xy}(\tau) = \hat{c}_{yx}(-\tau)$.
3.	$ \hat{R}_{xx}(\tau) \leq \hat{R}_{xx}(0), \forall \tau \neq 0$ $ \hat{C}_{xx}(\tau) \leq \hat{C}_{xx}(0), \forall \tau \neq 0$ $ \hat{c}_{xx}(\tau) \leq \hat{c}_{xx}(0) = 1, \forall \tau \neq 0$	Взаимные функции не обязаны иметь максимумы при $\tau=0$. Для них выполняется: $ \hat{R}_{xy}(\tau) ^2 \leq \hat{R}_{xy}(0)\hat{R}_{yx}(0)$, $ \hat{C}_{xy}(\tau) ^2 \leq \hat{C}_{xy}(0)\hat{C}_{yx}(0)$, $ \hat{c}_{xy}(\tau) ^2 \leq \hat{c}_{xy}(0)\hat{c}_{yx}(0)$
4.	Если сигнал X – периодический, то функции $\hat{R}_{xx}(0)$, $\hat{C}_{xx}(0)$, $\hat{c}_{xx}(0)$ тоже будут периодическими с тем же периодом.	
5.	Если ряд X не содержит периодических составляющих, то: $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{R}_{xx} = \langle x^2 \rangle$, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{C}_{xx} = 0$, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{c}_{xx} = 0$	

Примеры использования автокорреляции

На рис. 2.1 в качестве примера представлен участок временной реализации гармонического сигнала (рис. 2.1а) и зависимость величины коэффициента корреляции (КК) от сдвига τ (рис. 2.1б). Видно, что независимо от начальной фазы сигнала X, $\hat{c}_{xx}(\tau=0) = 1$, причем период сигнала сохраняется в КК.

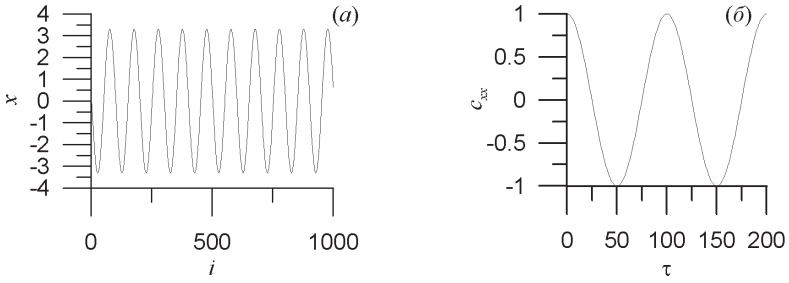


Рис 2.1 (а) -Участок временной реализации гармонического сигнала с периодом 100 дискретных отсчетов и (б) -построенная по этой реализации зависимость КК от сдвига.

Автокорреляция может оказать помощь при оценке степени нерегулярности исследуемого сигнала. На рис. 2.2а приведен участок временной реализации т.н. **белого шума** – эталона совершенно нерегулярного процесса. Такой процесс является не коррелированным (**время корреляции** равно 0). Это подразумевает, что последующие значения временной реализации не зависят от предыдущих значений, поэтому, коэффициент корреляции отличен от 0 только при $\tau=0$ (рис. 2.2б). Благодаря этой особенности КК, процесс белого шума называют еще **δ -коррелированным** шумом.

Важно понимать, что белый (δ -коррелированный шум), как и гармонический сигнал – это, математические абстракции, которые не могут быть реализованы на практике. В лучшем случае, удастся лишь получить хорошее приближение к этим эталонам. Например, в Delphi процесс белого шума моделируется с помощью функций random (модуль “System”) и RandG (модуль “Math”). Далее, тем не менее, для краткости, будем употреблять термины “белый шум” и “гармонический сигнал” в отношении экспериментальных данных, подразумевая, что речь идет лишь о процессах со свойствами близкими к свойствам указанных идеальных объектов.

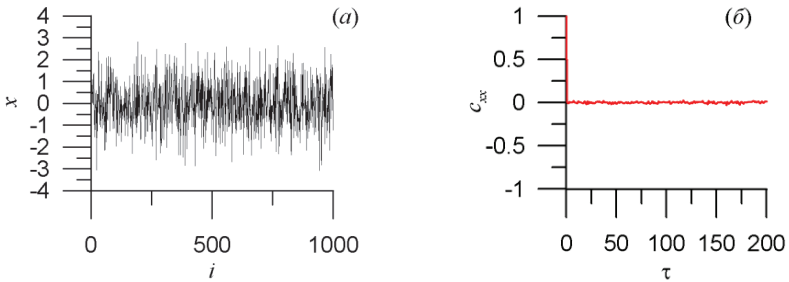


Рис 2.2 (а) -Участок временной реализации белого шума и (б) -построенная по этой реализации зависимость КК от сдвига. КК отличен от 0 только при $\tau=0$, для других τ с точностью до малых флуктуаций $\hat{C}_{xx} = 0$.

На практике часто приходится сталкиваться с шумоподобными сигналами, значения которых, тем не менее, зависят от нескольких предыдущих. Участок временной реализации такого сигнала и его АКФ представлены на рис. 2.3. В частности, подобный сигнал может быть получен в результате фильтрации в частотной области процесса белого шума. Такие сигналы, не имеющие выраженных периодических составляющих, называют

цветным шумом или **красным шумом**. В силу того, что корреляция падает до 0 за конечное время, такие процессы называют также **коррелированным шумом**.

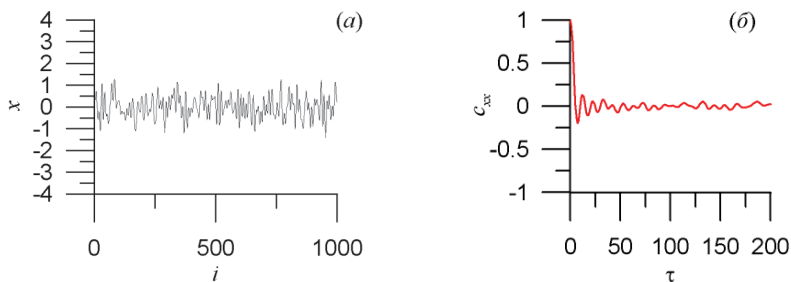


Рис 2.3 (а) –Участок временной реализации цветного шума и (б) –АКФ. Видно, что КК падает до 0 за конечное время.

Интересным применением автокорреляционного анализа является выделение периодических составляющих сигналов, скрытых шумом. Идея такой методики заключается в том, что, по свойствам корреляции, АКФ шума падает до 0 с увеличением τ , а корреляция периодических составляющих не падает. На рис. 2.4а представлен участок временной реализации гармонической функции с аддитивно добавленным белым шумом. Интенсивность шума такова, что “на глаз” признаков периодичности в сигнале не видно (рис. 2.4а). Вместе с тем, построение АКФ позволяет с легкостью определить период гармонической составляющей.

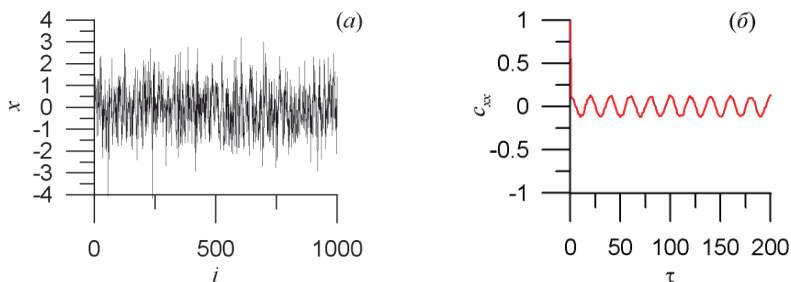


Рис 2.4 (а) –Участок временной реализации сигнала $x_i = 0.5 \cdot \sin(2\pi i/T) + \xi_i$, где ξ_i –гауссовский белый шум с 0 средним и дисперсией 1, период $T=20$ дискретных отсчетов. На глаз периодической составляющей не видно. (б) –АКФ сигнала x_i при различных τ . Видно, что КК быстро падает на малых τ , что характерно для шума, а затем демонстрирует незатухающие колебания с периодом T .

Пример расчета коэффициента корреляции

В качестве примера рассчитаем коэффициент взаимной корреляции двух реализаций: $X: \{3, 1, -1, 1, 3, 1, -1\}$ и $Y: \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0\}$ (рис. 2.5), полученных при оцифровке двух гармонических сигналов (пунктир на рис 2.5) с частотой дискретизации равной четверти периода гармонического сигнала.

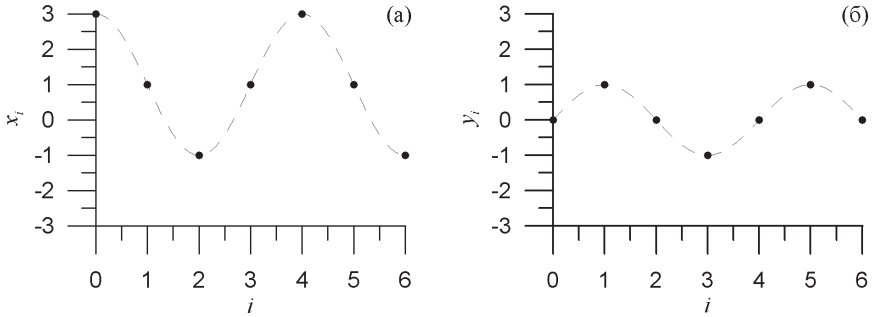


Рис 2.5 Временные реализации: (а) $-X$ (амплитуда 2.0, среднее 1.0) и (б), $-Y$ (амплитуда 1.0, среднее 0.0). Период обоих сигналов составляет 4 дискретных отсчета. Y отстает от X по фазе на $\frac{\pi}{2}$, т.е. на 1 дискретный отсчет.

Длина реализаций $N=7$, рассчитаем коэффициенты корреляции для сдвигов $\tau \in 0, \tau_{\max} = 2$. Чтобы длина участков реализаций по которым производится расчет КК не зависела от сдвига, длину реализации обычно ограничивают на величину максимальной рассматриваемой задержки, т.е. будем рассматривать участки реализаций длиной $N - \tau_{\max} = 7 - 2 = 5$.

Оценим статистические моменты первого порядка:

$$\hat{M}_x = \frac{1}{5}(3+1+(-1)+1+3) = \frac{7}{5} = 1.4,$$

$$\hat{M}_y = \frac{1}{5}(0+1+0+(-1)+0) = \frac{0}{5} = 0,$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x^2 &= \frac{1}{5}[(3-1.4)^2 + (1-1.4)^2 + (-1-1.4)^2 + (1-1.4)^2 + (3-1.4)^2] = \\ &= \frac{1}{5}[1.6^2 + (-0.4)^2 + (-2.4)^2 + (-0.4)^2 + 1.6^2] = \\ &= \frac{1}{5}[2.56 + 0.16 + 5.76 + 0.16 + 2.56] = 2.24, \end{aligned}$$

$$\hat{\sigma}_y^2 = \frac{1}{5}[0^2 + 1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 0^2] = \frac{2}{5} = 0.4.$$

Рассчитаем коэффициенты корреляции:

$$\hat{c}_{xy}(\tau=0) = \frac{1}{5} \frac{1}{\sqrt{2.24 \cdot 0.4}} [3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 0] = \frac{1}{5} \frac{1}{\sqrt{0.896}} [0 + 1 + 0 - 1 + 0] = 0,$$

$$\hat{c}_{xy}(\tau=1) = \frac{1}{5} \frac{1}{0.947} [3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1] = \frac{1}{4.733} [3 + 0 + 1 + 0 + 3] = 1.479,$$

$$\hat{c}_{xy}(\tau=2) = \frac{1}{4.733} [3 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0] = \frac{1}{4.733} [0 + -1 + 0 + 1 + 0] = 0.$$

Видно, что корреляция между сигналами X и Y при сдвигах $\tau=0$ и $\tau=2$ отсутствует, а $\hat{c}_{xy}(\tau=1)$ велико. $\hat{c}_{xy}(\tau=1)$ превышает 1, что является следствием попытки оценки КК по короткой реализации (как и погрешности при вычислении моментов низких порядков). При увеличении длины реализаций $\hat{c}_{xy}(\tau=1)$ стремится к 1, а ошибки оценки моментов

уменьшаются, т.к. рассматриваемые характеристики обладают свойством состоятельности.

Применение взаимных корреляционных функций

Корреляционный анализ активно используется в радио- и ультразвуковой локации. Принцип измерения расстояния до цели таков: излученный сигнал отражается от цели и принимается приемником. Скорость распространения сигнала в среде известна, поэтому, зная временную задержку между излученным - X и принятым - Y сигналами определить расстояние до цели не сложно. Основная сложность такого подхода в определении временного сдвига между X и Y . Дело в том, что амплитуда отраженного от цели сигнала, существенно меньше амплитуды излученного (рис. 2.6а), кроме того, обычно, отраженный сигнал сильно зашумлен (рис. 2.6в). Тем не менее, корреляционный анализ позволяет с высокой точностью определять временной сдвиг по положению максимума взаимной корреляционной функции (рис. 2.6г).

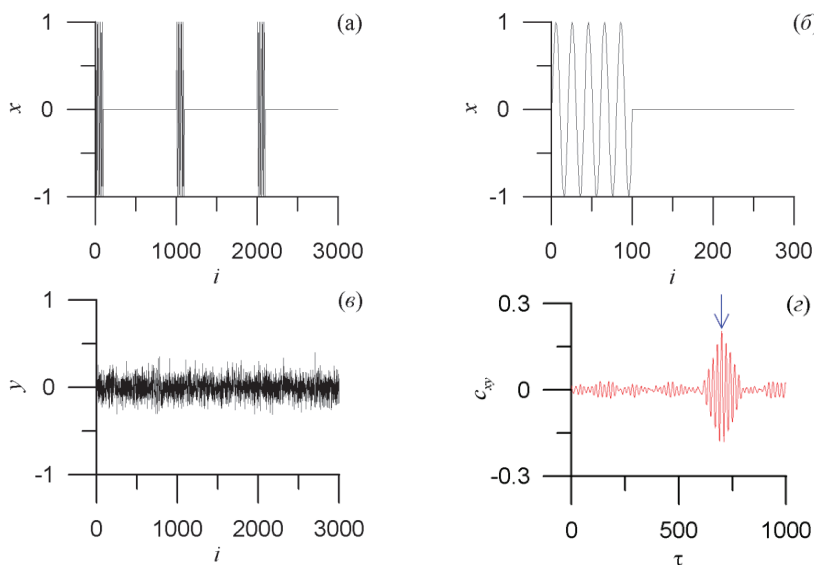


Рис. 2.6 (а) -Участок временной реализации сигнала X – “зондирующий сигнал, излученный радаром”. Сигнал представляет собой последовательность относительно коротких импульсов. (б) –Импульс в более крупном масштабе. В данном случае, импульс представляет собой, 5 периодов гармонического сигнала. (в) – Временной ряд “сигнала, принятого после отражения от цели”. Амплитуда сигнала уменьшилась в 10 раз, кроме того, аддитивно внесен гауссовский шум. Шум замазал характерную импульсную структуру сигнала, которая не видна невооруженным глазом. (г) –С помощью расчета коэффициента взаимной корреляции, найдя абсолютный максимум $\hat{c}_{xy}(\tau)$, удается верно определить временной сдвиг между сигналами X и Y :

$\tau_{xy} = 700$ дискретных отсчетов.

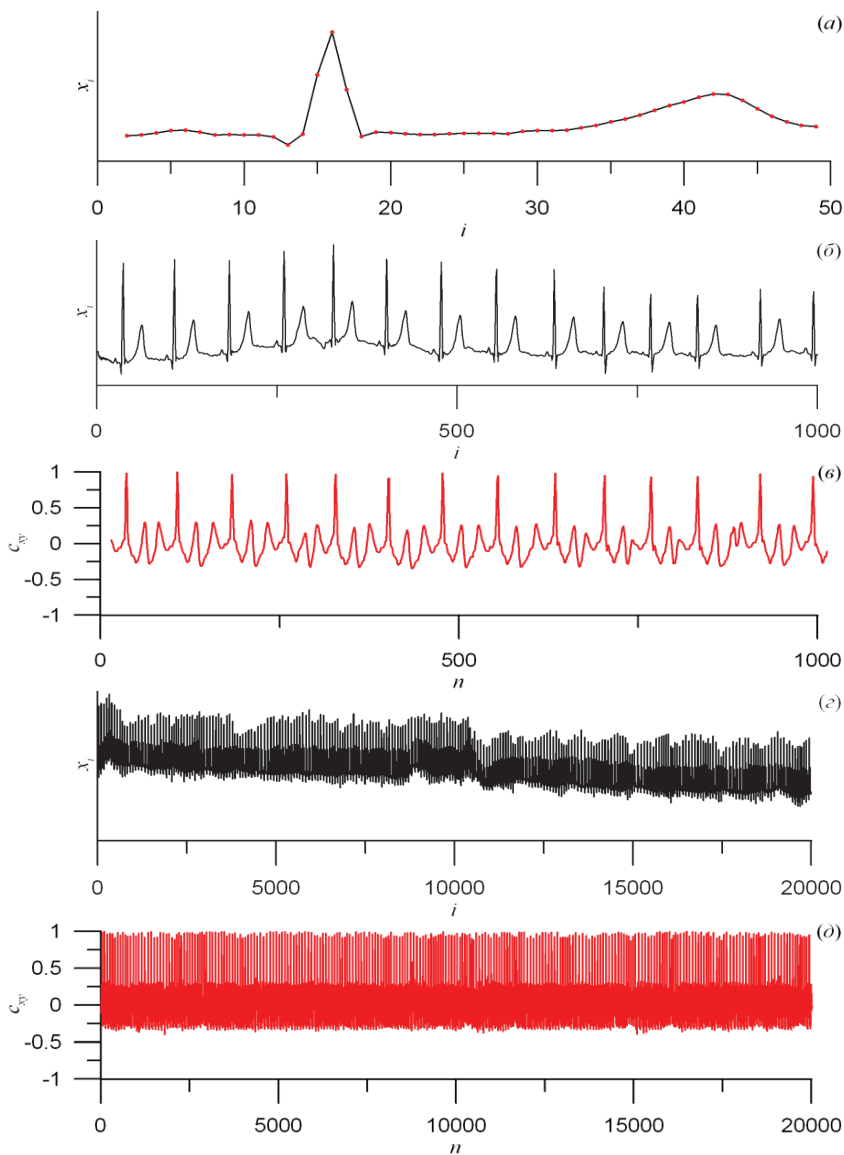


Рис 2.7 (а) –Участок сигнала ЭКГ – типичный кардиокомплекс. (б), (г)–Участки анализируемой реализации ЭКГ в разных масштабах. (в), (д)–Зависимость величины коэффициента корреляции от номера скользящего окна. Видно, что у такой зависимости отсутствуют тренды, пики, соответствующие R-зубцам ЭКГ видны более четко, кроме того, зависимость автоматически нормируется.

Типичным приложением корреляционного анализа является использование коэффициента корреляции в качестве меры “похожести” сигналов, например, при сопоставлении участка исследуемого сигнала с “эталонным” сигналом. Такой подход, в частности, может применяться для выделения в реальном времени последовательности

длительностей RR-интервалов электрокардиограммы (ЭКГ) – т.н. *кардиоритмограммы*. Кардиоритмограмма, согласно современным представлениям, играет важную роль в медицинской диагностике, неся важную информацию о состоянии сердечно-сосудистой и других систем организма. Решение задачи выделения последовательности RR сводится к решению задачи определения моментов R-пиков ЭКГ (наиболее коротких и высокоамплитудных положительных зубцов во 2 стандартном отведении ЭКГ). Решение осложняется принципиальной нестационарностью сигнала ЭКГ, обладающего значительной изменчивостью во времени, а также наличием шумов, артефактов и трендов (рис. 2.7б,г).

Для решения задачи на первом этапе выбирают участок сигнала, соответствующий “типичному” кардиоциклу (рис. 2.7а). Далее, в скользящем окне рассчитывается коэффициент корреляции. На рис. 2.7в представлена зависимость коэффициента корреляции от номера n скользящего окна. Видно, что расчет КК в скользящем окне позволяет четко выделить R-пики, автоматически нормируя сигнал удобным образом, причем тренд, имеющий место в исходном сигнале (рис. 2.7г), в зависимости $\hat{c}_{yy}(\tau = 0)$ от n уже отсутствует (рис. 2.7д), что позволяет, задавшись фиксированным порогом, с легкостью определить моменты R-пиков.

Лекция 3. Преобразование Фурье

Жан Батист Фурье. Преобразование Фурье. Некоторые свойства преобразования Фурье. Дискретное преобразование Фурье. Вычисление ДПФ. Пример расчета ДПФ.

Жан Батист Фурье

Жан Батист Жозеф Фурье родился в г. Осере (Оксер), в семье портного. Остался круглым сиротой в восьмилетнем возрасте. Сироту устроили в Военную школу при бенедиктинском монастыре. Жан Батист проходил обучение с удивительной легкостью быстротой, а окончив школу, остался там преподавателем. В 1795—1798 годах преподавал в знаменитой Политехнической школе. По отзывам слушателей, лекции Фурье были блестящими. В 1796 году возглавил кафедру математического анализа.

1812: Фурье получает Большую премию Академии за аналитическую теорию теплопроводности, несмотря на нестрогие доказательства. Свои методы (ряды и интегралы Фурье) он использовал в теории распространения тепла. Но вскоре они стали исключительно мощным инструментом математического исследования самых разных задач - особенно там, где есть волны и колебания. А этот круг чрезвычайно широк - астрономия, акустика, теория приливов, радиотехника, медицина, физиология и др.

Преобразование Фурье

Преобразование Фурье сигнала $x(t)$ имеет вид:

$$S(f) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt. \quad (3.1)$$

Показано, что преобразование существует, если выполняется т.н. условие *абсолютной интегрируемости*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (3.2)$$

Физический смысл выражения (3.2) можно понимать, как требование конечности энергии, содержащейся в исследуемом сигнале.

Преобразование Фурье позволяет перейти от рассмотрения сигналов во *временной области* к их анализу и обработке в *частотной области*. Говорят, что $S(f)$ является *Фурье-образом сигнала $x(t)$ в частотной области*. Такая терминология и классификация подходов к анализу данных с точки зрения зависимости исследуемых

величин от времени или частоты используется достаточно широко, хотя и является, во многом, условной. Дело в том, что между сигналом и его Фурье-образом существует взаимно-однозначное соответствие, т.е. $S(f)$ может быть получено из сигнала $x(t)$ единственным образом – с помощью преобразования Фурье (3.1), и обратная операция – восстановление $x(t)$ по $S(f)$ также может быть осуществлена единственным образом. Для этого используется преобразование, которое так и называется: **обратное преобразование Фурье**:

$$x(t) = F^{-1}[S(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{j2\pi ft} dt. \quad (3.3)$$

Графическое представление $|S(f)| = \sqrt{(\operatorname{Re} S(f))^2 + (\operatorname{Im} S(f))^2}$ называют **амплитудным спектром** сигнала $x(t)$, наиболее часто на практике используют **спектр мощности** $|S(f)|^2$.

Для того чтобы понять смысл преобразования Фурье, рассмотрим несколько примеров его применения к эталонным сигналам различной природы (рис. 3.1).

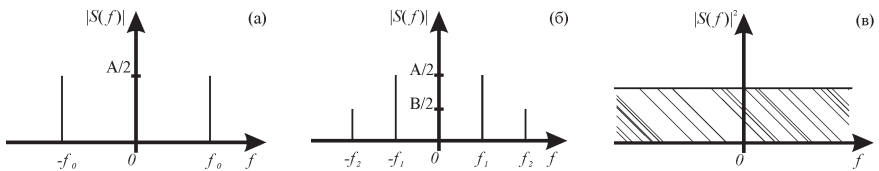


Рис. 3.1 (а)–Амплитудный спектр гармонической функции $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$. (б)–Спектр суммы синусоидальных сигналов: $x(t) = A \sin(2\pi f_1 t) + B \sin(2\pi f_2 t)$, где $A > B$ и $f_2 > f_1$. (в)– Спектр мощности т.н. белого шума – $x(t) = \xi(t)$ – сигнала, обладающего сплошным равномерным спектром.

Некоторые свойства преобразования Фурье:

1. Спектр гармонического сигнала представляет собой бесконечно узкий δ -пик на частоте сигнала, причем амплитуда пика пропорциональна амплитуде сигнала (рис 3.1а).
2. Фурье-образ суммы гармонических сигналов представляет собой набор δ -пику, появляющихся на частотах суммируемых гармонических сигналов (рис. 3.1б).
3. Спектр мощности шумового сигнала сплошной (рис. 3.1в).
4. Составляющая в спектре при $f=0$ называется **постоянной составляющей** и равна матожиданию M_x сигнала $x(t)$.
5. Отрицательные частоты в общем случае не имеют физического смысла.
6. Спектр симметричен относительно оси ординат: $f=0$, т.е. для получения информации о спектральном составе сигнала достаточно знать $S(f)$ для $f \in [0, \infty)$.

Дискретное преобразование Фурье

На практике всегда имеют дело с дискретными временными рядами конечной длины. Будем считать, что анализируемый временной ряд $\{x_i\}$ эквидистантный. Для рассмотрения таких данных в частотной области пользуются **дискретным преобразованием Фурье** (ДПФ):

$$\hat{S}(f_h) = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi f_h t_i}, \quad (3.4)$$

где $\{x_i\}$ - анализируемый временной ряд длины N , $i \in Z$ - безразмерное дискретное время, t_i , (с)- дискретное время, f_h , (Гц)- дискретная частота.

Обратное преобразование имеет вид:

$$x_i = \sum_{h=0}^{M-1} \hat{S}(f_h) e^{j2\pi f_h t_i}, \quad (3.5)$$

где $h \in Z$ называют **номером гармоники**, M - число гармоник, определяемое длиной реализации:

$$M = \begin{cases} \frac{N}{2}, & N = 2n, n \in Z, \\ \left[\frac{N}{2} \right] + 1, & N = 2n + 1, n \in Z, \end{cases} \quad (3.6)$$

где оператор $[...]$ означает взятие целой части числа.

Гармоникой называют дискретную составляющую в спектре.

Дискретное время выражается, как:

$$t_i = i \cdot \Delta t, \quad (3.7)$$

Δt , (с)- время выборки, а дискретная частота:

$$f_h = h \cdot \Delta f, \quad (3.8)$$

Δf , (Гц)- **спектральное разрешение** (расстояние в спектре по частоте между ближайшими гармониками). Очевидно, что анализируя временной ряд конечной длительности N , снятый при конечной фиксированной частоте дискретизации $F_{samp} = 1/\Delta t$, (Гц), различить 2 расположенные бесконечно близко частоты в спектре, в отличие от непрерывного случая, невозможно в принципе. Более того, можно показать, что для таких данных расстояние между ближайшими частотами в спектре будет составлять:

$$\Delta f = \frac{F_{samp}}{N} = \frac{1}{N \cdot \Delta t}, \quad (3.9)$$

понятно, что чем меньше Δf , тем выше спектральное разрешение. Из формулы (3.9) видно, что спектральное разрешение увеличивается с увеличением времени наблюдения, поэтому, в частности, в общем случае, анализ сигналов стараются осуществлять по как можно более длинной реализации.

Вычисление ДПФ

Используя формулу Эйлера:

$$z = a e^{j\varphi} = a(\cos\varphi + j \sin\varphi), \quad (3.10)$$

преобразуем выражение (3.4):

$$\begin{aligned} \hat{S}(f_h) &= \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi f_h t_i} = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i [\cos(-2\pi f_h t_i) + j \sin(-2\pi f_h t_i)] = \\ &= \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cos(2\pi f_h t_i) - j \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \sin(2\pi f_h t_i). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из формулы (4) видно, что ДПФ представляет собой комплексную функцию действительного аргумента. Такая запись компактна и удобна для аналитических выкладок, но вычисления на ЭВМ удобнее осуществлять с вещественными числами. Кроме того, для решения ряда практических задач оказывается удобно раздельно хранить в памяти ЭВМ действительную и мнимую части $\hat{S}(f_h)$, поэтому, формулу (3.11) часто переписывают в виде:

$$\begin{aligned}\hat{S}(f_h) &= a_{f_h} + jb_{f_h}, \\ a_{f_h} &= \operatorname{Re} \hat{S}(f_h) = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cos(2\pi f_h t_i), \\ b_{f_h} &= \operatorname{Im} \hat{S}(f_h) = -\frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \sin(2\pi f_h t_i).\end{aligned}\quad (3.12)$$

Используя (3.7), (3.8), (3.9) можно упростить выражения для действительной и мнимой частей $\hat{S}(f_h)$:

$$\begin{aligned}a_h &= \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cos(2\pi f_h t_i) = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cos(2\pi h \frac{1}{N\Delta t} i\Delta t) = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cos(2\pi h i / N), \\ b_h &= -\frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \sin(2\pi f_h t_i) = -\frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \sin(2\pi h \frac{1}{N\Delta t} i\Delta t) = -\frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \sin(2\pi h i / N), h = 0, M-1.\end{aligned}\quad (3.13)$$

Таким образом, ДПФ сводится к вычислению действительных коэффициентов a_h и b_h по формуле (3.12) или (3.13). Рассмотрим смысл этих формул более подробно. Рассмотрев (3.12), видно, что выражения для коэффициентов a_{f_h} и b_{f_h} с точностью до нормировки на постоянную величину представляют собой ковариации реализации $\{x_i\}$ с функциями Cos и Sin с частотой f_h , соответственно. Если $\{x_i\}$ представляет собой синусоиду с частотой $f_{h=k}$, нулевой начальной фазой и амплитудой A , то $a_{f_h} = 0, b_{f_h} = A$; если косинусоиду, то $a_{f_h} = A, b_{f_h} = 0$; если же начальная фаза отлична от 0, то $0 < a_{f_h} < A, 0 < b_{f_h} < A$, а начальная фаза такого гармонического сигнала может быть определена из соотношения коэффициентов:

$$\varphi(f_h) = \operatorname{arctg} \left(\frac{b_{f_h}}{a_{f_h}} \right).\quad (3.14)$$

В любом случае, в амплитудном спектре:

$$|\hat{S}(f_h)| = \sqrt{a_{f_h}^2 + b_{f_h}^2},\quad (3.15)$$

будет иметь место пик на частоте $f_{h=k}$ с амплитудой A , причем амплитуда остальных пиков на $\forall f_{h \neq k}$ будет нулевой (рис. 3.2а). Если же анализируемый сигнал не гармонический, но периодический с частотой $f_{h=k}$ то соответствующие коэффициенты a_{f_h} и b_{f_h} будут принимать некие ненулевые значения, что отразится на форме спектра.

Таким образом, подводя итог рассуждениям:

1. ДПФ заключается в оценке “похожести” анализируемого сигнала на последовательный набор гармонических функций с частотами $f_h = h \cdot \Delta f$, $h = 0, M-1, h \in Z$.
2. В качестве меры похожести используется ковариация.
3. На практике, ДПФ осуществляется, используя формулы (3.13). Применяя их, рассчитывают массив коэффициентов, определяющих действительную и мнимую части преобразования.

Используя введенные обозначения, обратное ДПФ можно записать, как:

$$x_i = \sum_{h=0}^{M-1} a_h \cos(2\pi h i / N) - \sum_{h=0}^{M-1} b_h \sin(2\pi h i / N) = a_0 + \sum_{h=1}^{M-1} a_h \cos(2\pi h i / N) - \sum_{h=1}^{M-1} b_h \sin(2\pi h i / N).\quad (3.16)$$

Формула (3.16) позволяет выразить смысл ДПФ следующим образом: ДПФ позволяет представить анализируемый ряд, в общем случае, сложной формы, в виде конечной суммы гармонических функций (рис. 3.3).

Наиболее часто, ДПФ используется для оценки амплитудного спектра (3.15) и спектра мощности:

$$|\hat{S}(f_h)|^2 = a_h^2 + b_h^2. \quad (3.17)$$

Пример расчета ДПФ

В качестве примера осуществим ДПФ и построим амплитудный спектр реализации $\{x_i\} = \{0, 1, 0, -1\}$, представляющей собой временной ряд гармонического сигнала с периодом 25 (Гц), оцифрованного с частотой $F_{\text{samp}}=100$ (Гц) (рис. 3.2а).

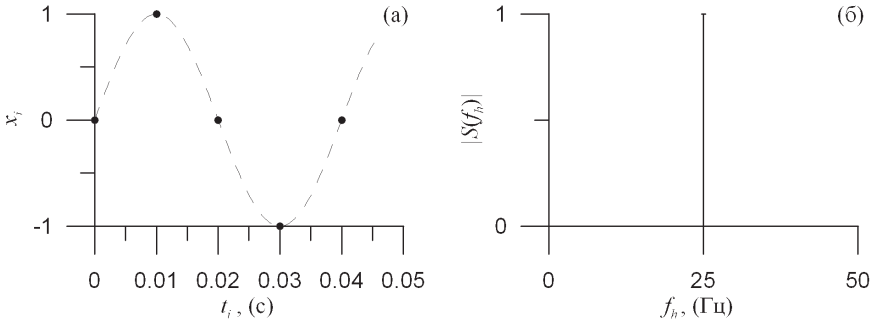


Рис. 3.2 (а) – Временная реализация (точки) гармонического сигнала (пунктирная линия) с частотой 25 (Гц). Частота дискретизации 100 (Гц). (б) – Амплитудный спектр этой реализации. Содержит 2 гармоники, т.к. длина ряда 4 отсчета. Составляющая на 25 (Гц) равна амплитуде исследуемого сигнала.

Длина реализации $N=4$ – четное число, тогда, пользуясь формулой (3.6) можно определить число гармоник в разложении Фурье: $M=N/2=2$. Спектральное разрешение:

$\Delta f = \frac{F_{\text{samp}}}{N} = 100/4 = 25$ (Гц). Как упоминалось выше, ДПФ сводится к вычислению по

формуле (3.13) для всех $h = \overline{0, M-1}$, $h \in Z$ коэффициентов a_h и b_h , представляющих собой действительную и мнимую части преобразования, соответственно. Тогда:

$$a_{h=0} = \frac{2}{4} \sum_{i=0}^{4-1} x_i \cos(2\pi \cdot 0 \cdot i/4) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 x_i \cos(0) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 x_i = \frac{1}{2} (0+1+0+(-1)) = 0,$$

$$b_{h=0} = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 x_i \sin(2\pi \cdot 0 \cdot i/4) = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 x_i \sin(0) = 0,$$

$$a_{h=1} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 x_i \cos(2\pi \cdot 1 \cdot i/4) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 x_i \cos(\pi i/2) = \frac{1}{2} (0 \cdot \cos(\pi \cdot 0/2) + 1 \cdot \cos(\pi \cdot 1/2) + 0 \cdot \cos(\pi \cdot 2/2) + (-1) \cdot \cos(\pi \cdot 3/2)) = \frac{1}{2} (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0) = 0,$$

$$b_{h=1} = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 x_i \sin(2\pi \cdot 1 \cdot i/4) = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 x_i \sin(\pi i/2) = -\frac{1}{2} (0 \cdot \sin(\pi \cdot 0/2) + 1 \cdot \sin(\pi \cdot 1/2) + 0 \cdot \sin(\pi \cdot 2/2) + (-1) \cdot \sin(\pi \cdot 3/2)) = -\frac{1}{2} (0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1)) = -\frac{1}{2} 2 = -1.$$

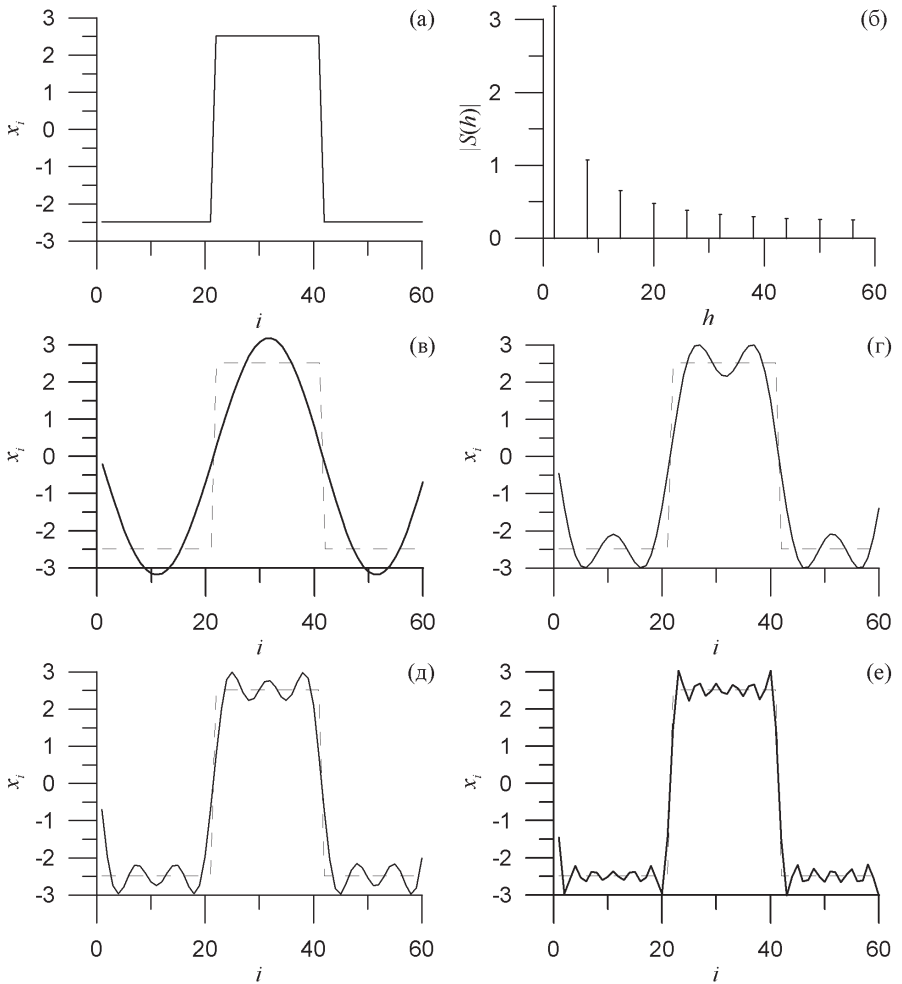


Рис. 3.3 Разложение прямоугольных импульсов на сумму гармонических составляющих с помощью преобразования Фурье. (а) – Первые 60 дискретных отсчетов временной реализации $\{x_i\}$ последовательности прямоугольных импульсов. Длина всей реализации 120 отсчетов, период следования импульсов 40 отсчетов, т.е. частота генерации импульсов $f_0=1/40=0.025$. (б) – Амплитудный спектр $\{x_i\}$. Содержит отличные от 0 составляющие только на частотах кратных f_0 : $3f_0, 5f_0, 7f_0, \dots$ – т.н. нечетных **гармониках**. (в) – Сравнение исходного сигнала (пунктир) и его первой ненулевой спектральной составляющей (**первой** или **основной гармонике**, соответствующей f_0). (г) – Сумма двух-, (д) – трех-, (е) – шести первых ненулевых спектральных составляющих. Видно, что при увеличении числа суммируемых гармоник форма сигнала приближается к форме исходного прямоугольного импульса. Аналогичным образом, удастся раскладывать на гармонические составляющие различные сигналы сложной формы.

Амплитудный спектр $\left| \hat{S}(f_h = h \cdot \Delta f) \right|$ будет состоять из $M=2$ гармоник (рис. 3.2б):

$$\left| \hat{S}(f_0 = 0.25) = 0 \right| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0,$$

$$|\hat{S}(f_1 = 1 \cdot 25) = 25| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1.$$

Можно заметить, что всегда выполняется: $b_{n=0} = 0$, $a_{n=0} = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i$. Это свойство

используют для ускорения расчетов.

Пользуясь формулой (3.16) рассчитаем обратное ДПФ:

$$x_0 = 0 + 0 \cdot \cos(2\pi \cdot 1 \cdot 0/4) - (-1) \cdot \sin(2\pi \cdot 1 \cdot 0/4) = 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0,$$

$$x_1 = 0 + 0 \cdot \cos(2\pi \cdot 1 \cdot 1/4) - (-1) \cdot \sin(2\pi \cdot 1 \cdot 1/4) = 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1,$$

$$x_2 = 0 + 0 \cdot \cos(2\pi \cdot 1 \cdot 2/4) - (-1) \cdot \sin(2\pi \cdot 1 \cdot 2/4) = 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0,$$

$$x_3 = 0 + 0 \cdot \cos(2\pi \cdot 1 \cdot 3/4) - (-1) \cdot \sin(2\pi \cdot 1 \cdot 3/4) = 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = -1.$$

Лекция 4. Особенности использования ДПФ

Вычислительная сложность ДПФ. Быстрое преобразование Фурье. Эффект подмены частот. Эффект утечки и борьба с ним.

Формулы, с помощью которых может быть осуществлено ДПФ, были рассмотрены в предыдущей лекции. Нужно отметить, что при практическом использовании этого полезного инструмента имеется ряд нюансов, которые нужно учитывать для правильной интерпретации результатов спектрального анализа. Исследователь должен представлять влияние на результат анализа эффекта отражения (подмены) частот, эффекта утечки и специфику оценки спектров мощности зашумленных сигналов. Эти вопросы рассматриваются ниже.

Вычислительная сложность ДПФ. Быстрое преобразование Фурье

Оценим вычислительную сложность ДПФ. В качестве примера подсчитаем количество операций сложения и умножения, потребовавшихся для вычисления коэффициентов ДПФ последовательности, состоящей из $N=4$ значений (см. пример из лекции 3). В общем случае, нужно выполнить $16=4^2$ операций комплексного умножения и $12=4 \cdot 3$ операций комплексного сложения. Вообще, показано, что вычислительная сложность ДПФ составляет порядка N^2 операций умножения и сложения. Например, при вычислении ДПФ по последовательности длиной $N=1024$ значения, ЭВМ выполнит более миллиона операций комплексного умножения и более миллиона раз осуществит суммирование комплексных операндов, что достаточно много.

Оптимизированный по быстродействию алгоритм разложения сигналов на гармонические составляющие впервые был предложен Кули (Cooley) и Тьюки (Tukey) в середине XX в. С тех пор появилась целая серия оптимизированных алгоритмов расчета ДПФ, которые объединяют общим названием **быстрое преобразование Фурье (БПФ, FFT, Fast Fourier Transform)**, или, по имени первых исследователей – **алгоритмы Кули-Тьюки**.

Суть БПФ заключается в исключении избыточности, присущей ДПФ. Действительно, посмотрев на формулы (3.13) видно, что $g_s(hi) = \sin(2\pi hi/N)$ и $g_c(hi) = \cos(2\pi hi/N)$ вычисляются несколько раз при одинаковом аргументе. Например, для $i=1, h=2$ и $i=2, h=1$ аргумент этих функций будет одинаковым. Показано, что если выбрать длину N анализируемых участков реализаций специальным образом: $N=2^e, e \in Z$, то можно перегруппировать слагаемые так, что $g_s(hi)$ и $g_c(hi)$ с одинаковыми аргументами выйдут за скобки. При этом, достигается вычислительная сложность порядка $\frac{N}{2} \log_2 N$. Например, при вычислении БПФ последовательности

длиной $N=1024$ требуется $\frac{1024}{2} \log_2 1024 = 512 \cdot 10 = 5120$ операций, что более чем в 200 раз меньше, чем при использовании ДПФ, причем эффективность БПФ относительно ДПФ линейно растет с увеличением длины ряда.

В настоящее время разработаны алгоритмы БПФ, которые эффективно работают в случае, если N можно разложить на произведение небольших простых чисел. Такие алгоритмы, например, реализованы в составе известной математической и статистической библиотеки IMSL™, которая, в частности, входит в комплект поставки компиляторов Visual Fortran различных производителей.

Эффект подмены частот

Эффект подмены (наложения, отражения, маскировки) частот (англ. *aliasing*) является следствием конечной частоты дискретизации цифрового сигнала и принципиально не наблюдается для непрерывных во времени сигналов.

Показано, что максимальная частота, которую можно увидеть в спектре цифрового сигнала не превышает т.н. **частоты Найквиста** $F_n = \frac{F_{samp}}{2}$. Существование такой частоты следует из теоремы Котельникова, где доказано, что непрерывный сигнал $x(t)$ может быть восстановлен по его бесконечному временному ряду $\{x_i\}$ однозначно только в случае, если спектральный состав $x(t)$ ограничен, причем максимальная частота в спектре сигнала не превышает F_n . В противном случае, возникают т.н. **ошибки маскировки частот**, ведущие к неоднозначности.

В случае если в исходном сигнале имеются составляющие с частотой от F_n до $2F_n$, они в результате ошибок маскировки частот “зеркально отразятся” относительно частоты Найквиста и проявятся в спектре сигнала (в полосе от 0 до F_n). Полоса от $2F_n$ до $3F_n$ “наложится” на спектр мощности, полоса $3F_n - 4F_n$ снова отразиться и т.д. см. рис. 4.1.

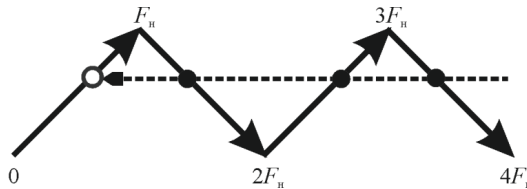


Рис. 4.1 Схематическое изображение подмены частот: составляющие с частотами превышающими F_n (черные кружки) накладываются в соответствии с приведенной схемой на спектр цифрового сигнала (белый кружок).

В качестве примера, иллюстрирующего эффект подмены частот рассмотрим оцифровку сигнала с различными частотами дискретизации (рис. 4.2).

Подмена частот является одной из известных проблем ЦОС. Если она произошла, то отличить реально присутствующие в спектре частоты от подменных обычно невозможно. Наиболее эффективным средством борьбы с подменой частот в устройствах цифровой обработки сигналов является использование аналогового **противоподменного фильтра** (англ. *antialiasing filter*), устанавливаемого перед АЦП (рис. 1.2). Противоподменный фильтр пропускает только составляющие сигнала, частоты которых не превышают F_n .

Эффект утечки и борьба с ним

Эффект утечки является следствием конечной длины анализируемой временной реализации.

Пусть имеется временная реализация $\{x_i\}$ длиной $N=100$ отсчетов. Реализация представляет собой сумму двух синусоидальных сигналов с нулевыми начальными фазами, периодами 50 и 20 отсчетов и амплитудами 1 и 5 соответственно (рис. 4.3а). На длине этого ряда укладывается целое число периодов гармонических составляющих. Амплитудный спектр такой реализации представлен на рис. 4.3б. Он содержит только 2 ненулевые составляющие.

Проанализируем теперь первые 80 отсчетов этого ряда (рис. 4.4а). Теперь на длине ряда укладываются 4 периода высокочастотной составляющей и нецелое число периодов низкочастотной. Спектр этой последовательности изображен на рис. 4.4б. Видно, что пик, соответствующий низкочастотной составляющей “расплылся”, став ниже по амплитуде и шире в частотной области. Аналогичные эффекты наблюдаются, при задании длины анализируемого участка реализации в 50 (рис. 4.4в,г) и в 90 (рис. 4.4д,е) отсчетов.

Приведенные примеры иллюстрируют эффект утечки, который заключается в “вытекании” энергии из спектральных компонент, соответствующих гармоническим составляющим сигнала и “втекании” ее в другие компоненты. Эффект утечки возникает при наличии разрыва на краях реализации и проявляется сильнее при анализе более коротких рядов. Этот эффект способен значительно осложнить анализ спектрального состава сигнала, маскируя малые по амплитуде периодические составляющие и приводя к искажению информации об амплитудах и энергиях гармоник (см., например, рис. 4.4в,г).

При расчетах спектров могут использоваться, в основном, два способа борьбы с эффектом утечки: специальный выбор частоты дискретизации и длины обрабатываемого участка ряда и использование *оконных преобразований (windowing)*. Выбор частоты дискретизации и длины ряда должен обеспечивать целое число отсчетов на период сигнала и целое число периодических составляющих на длину ряда. Понятно, что на практике эти условия часто выполнить затруднительно, а для непериодических (хаотических или содержащих шум) сигналов невозможно. Поэтому, наиболее широкое распространение получил метод оконных преобразований.

Суть метода проста: для уменьшения разрывов на краях ряда с целью ослабления влияния утечки нужно уменьшить амплитуду сигнала возле краев. Такое масштабирование осуществляется путем умножения реализации на окно специальной формы (рис. 4.5):

$$x_i^w = x_i \cdot W(i). \quad (4.1)$$

При теоретическом исследовании свойств оконных преобразований принято считать, что анализируемая реализация длиной $N < \infty$ получена путем умножения исходной реализации на *прямоугольное окно*:

$$W(i) = \begin{cases} 1, & i \in [0, N-1], \\ 0, & i \in (-\infty, 0) \cup [N, \infty). \end{cases} \quad (4.2)$$

Поэтому, упоминание в литературе сопоставления различных оконных функций с прямоугольным окном подразумевает сопоставление реализаций, умноженных на указанные окна, с исходной реализацией.

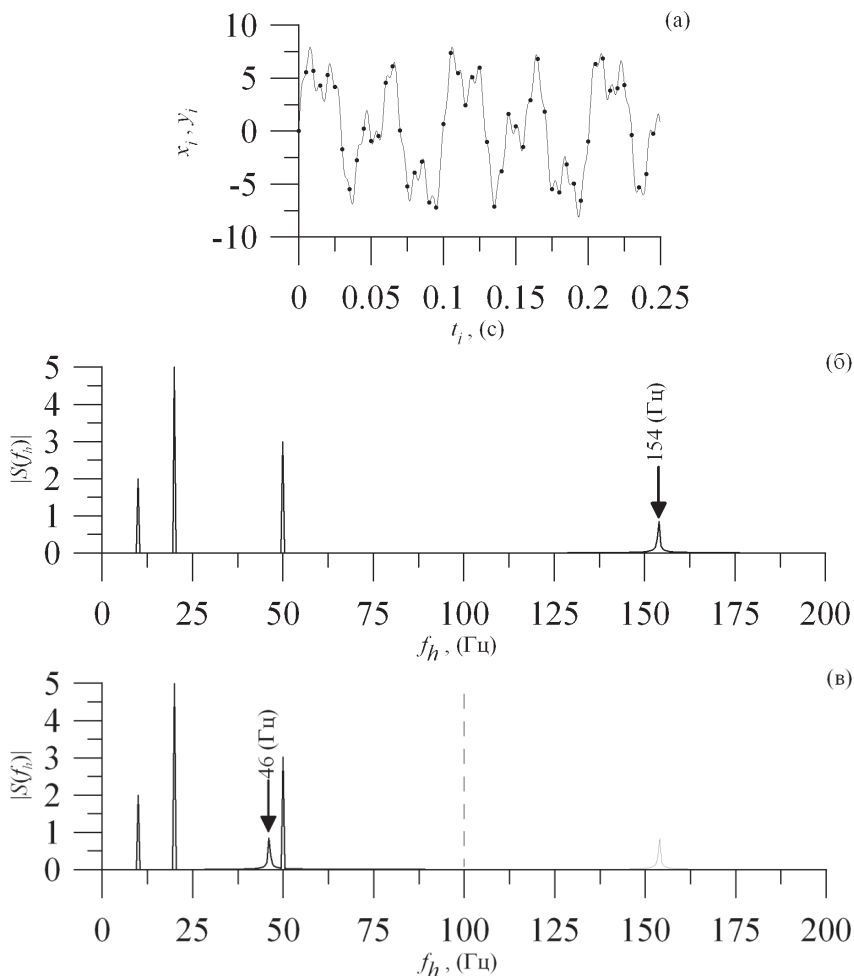


Рис. 4.2 Иллюстрация эффекта отражения частот. (а) – Сплошная линия: временной ряд $\{x_i\}$ (частота дискретизации 2 кГц) сигнала представляющего собой сумму гармонических функций с частотами 10, 20, 50 и 154 (Гц) и амплитудами: 2, 5, 3 и 1, соответственно. Точки: временной ряд $\{y_i\}$ этого сигнала, записанный с частотой $F_{samp}=200$ Гц. (б) – Амплитудный спектр, оцененный по реализации $\{x_i\}$. Достаточно высокая частота дискретизации 2000 Гц позволяет корректно наблюдать в спектре составляющую с частотой 154 Гц (помечена стрелкой). (в) – Амплитудный спектр, оцененный по реализации $\{y_i\}$. Частота дискретизации $F_{samp}=200$ Гц недостаточна для корректной интерпретации составляющих с частотой превышающей частоту Найквиста: $F_n = F_{samp}/2=100$ Гц. Спектральная составляющая с частотой 154 Гц $> F_n=100$ Гц “зеркально отражается” относительно F_n (пунктирная линия) и проявляется в спектре в виде пика на частоте $F_{samp}-154$ Гц=46 Гц (указана стрелкой).

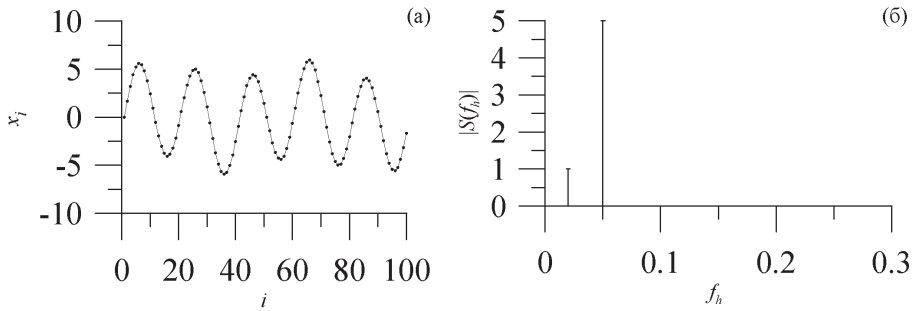


Рис. 4.3 (а) – Временной ряд $x_i = \sin(2\pi i / 50) + 5\sin(2\pi i / 20)$, $i = \overline{0, 99}$. (б) – Амплитудный спектр $\{x_i\}$.

Использование окон позволяет уменьшить утечку энергии из пиков в соседние спектральные составляющие (рис. 4.6). Платой за ослабление эффекта утечки является увеличение ширины пиков, соответствующим периодическим составляющим сигнала (рис. 4.7).

Таким образом, применение оконных функций подразумевает поиск компромисса между этими двумя негативными эффектами посредством выбора подходящего окна. Для всех известных окон аналитически рассчитаны и приводятся в справочной литературе такие параметры, как ширина главного пика и скорость уменьшения боковых лепестков. Вместе с тем, на практике, при построении систем ЦОС, особенно биомедицинской направленности, подбор оконной функции на основе предварительных аналитических оценок затруднен, в частности, нестационарностью сигнала. Нередко оказывается, что применение оконных преобразований не позволяет заметно улучшить точность оценки спектров. При анализе таких сигналов стратегией поведения исследователя может быть экспериментальное сопоставление результатов применения 2-3 различных оконных преобразований.

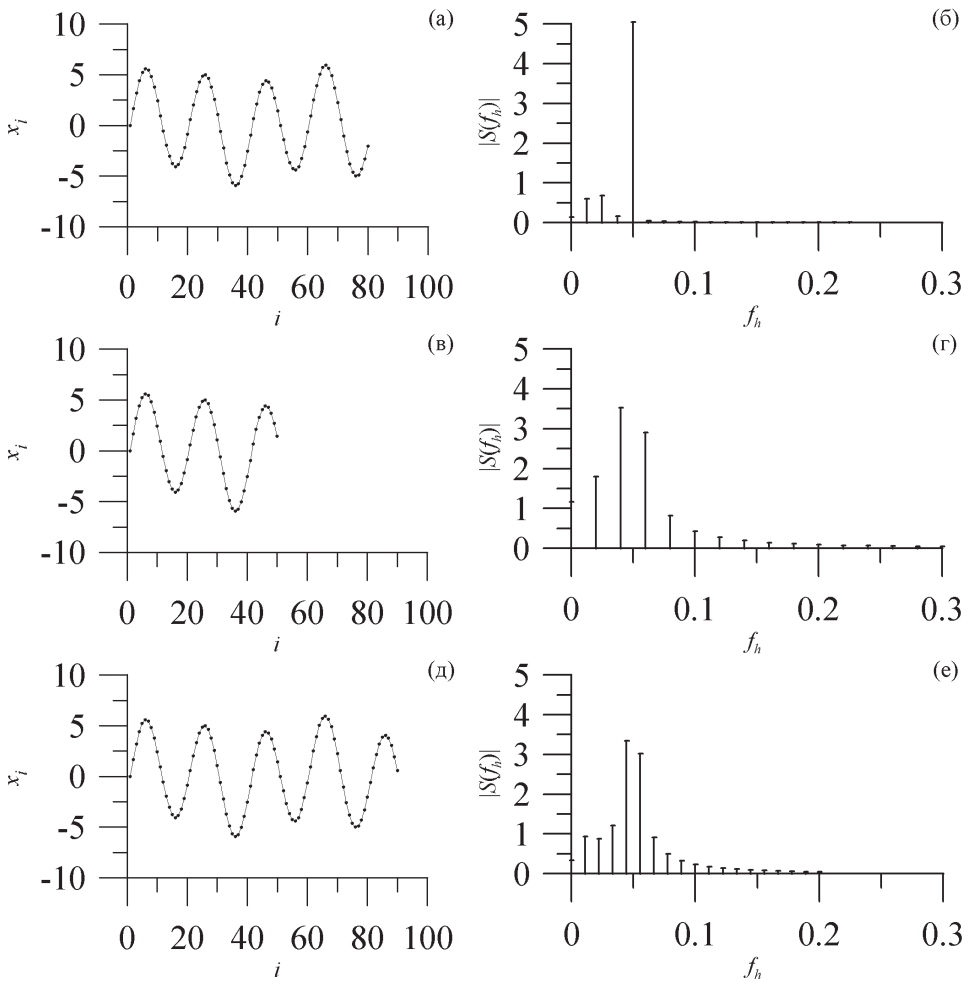
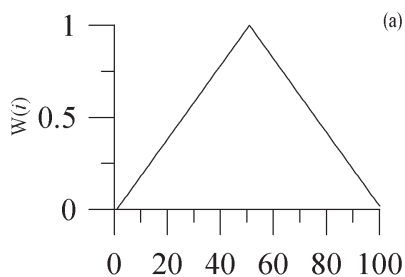


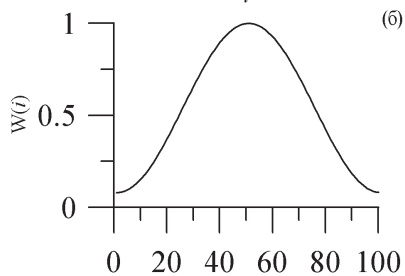
Рис. 4.4 Иллюстрация эффекта утечки на примере временной реализации последовательности $x_i = \sin(2\pi i/50) + 5\sin(2\pi i/20)$ длиной (а) – 80, (в) – 50 и (д) – 90 отсчетов. Соответствующие амплитудные спектры (б), (г), (е) позволяют наблюдать вытекание энергии из спектральных составляющих, для которых не укладывается на длине реализации целого числа периодов колебаний.



Треугольное окно (окно Бартлетта):

$$W(i) = 1 - 2|t_i|, \quad (4.3)$$

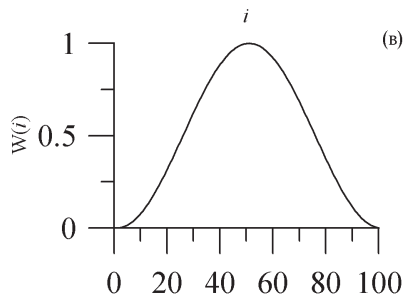
$$\text{где } t_i = \frac{i - N/2}{N}, \quad (4.4)$$



Окно приподнятого косинуса (окно Хэмминга):

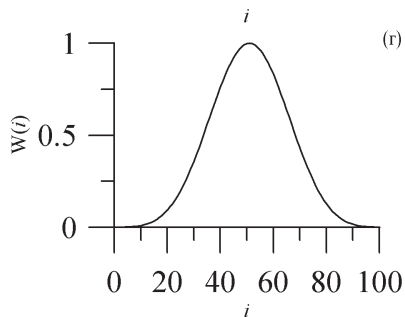
$$W(i) = 0.46\cos(2\pi t_i) + 0.54, \quad (4.5)$$

i - дискретное время.



Окно косинус-квадрат (окно Ханна):

$$W(i) = \cos^2(\pi t_i), \quad (4.6)$$



Окно взвешенных косинусов (окно Наттола):

$$W(i) = 0.010641 \cos(6\pi t_i) + \\ + 0.1365995 \cos(4\pi t_i) + \\ + 0.4891775 \cos(2\pi t_i) + 0.3635819 \quad (4.7)$$

Рис. 4.5 Наиболее часто используемые оконные функции (для реализации длиной $N=100$ значений): (а) – Треугольное окно (Бартлетта), (б) – приподнятый косинус (Хэмминга), (в) – косинус-квадратное (Ханна), (г) – взвешенные косинусы (Наттола). В правом столбце приведены соответствующие формулы.

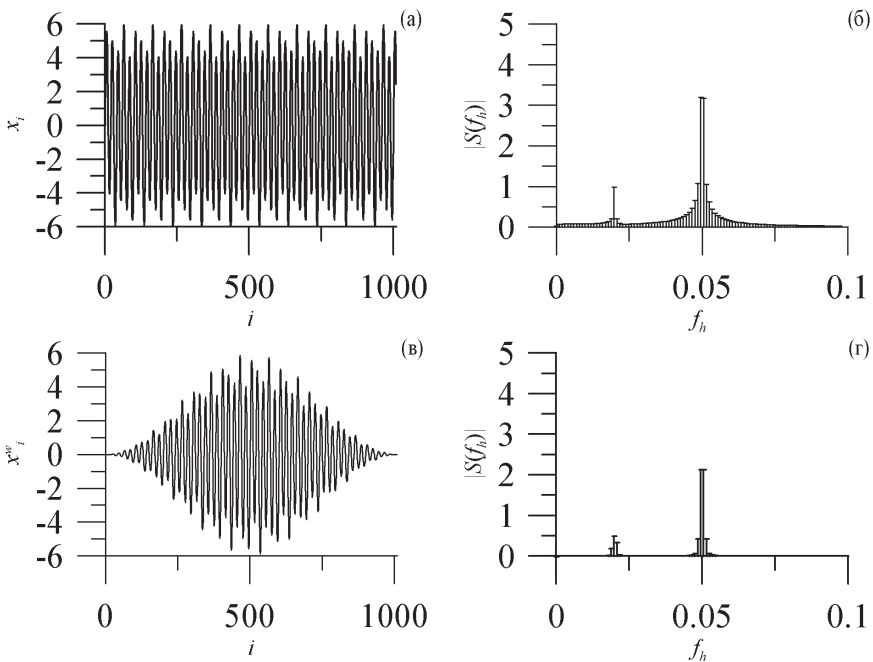


Рис. 4.6 (а) – 1010 значений реализации суммы 2 гармонических сигналов с периодами 20 и 50 дискретных отсчетов и амплитудами 5 и 1, соответственно. (б) – Амплитудный спектр позволяет наблюдать эффект утечки. (в) – Умножение сигнала на оконную функцию Ханна позволяет уменьшить уровень боковых лепестков около пиков в спектре – (г) и облегчает идентификацию пиков.

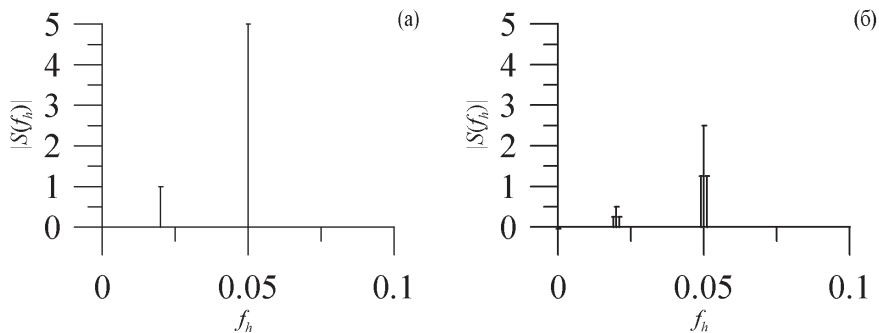


Рис. 4.7 (а) – Амплитудный спектр 1000 значений реализации суммы 2 гармонических сигналов с периодами 20 и 50 дискретных отсчетов и амплитудами 5 и 1, соответственно. (б) – Амплитудный спектр этой реализации после применения окна Ханна. Видно, что применение окна увеличивает ширину пиков.

Лекция 5. Расчет спектров мощности

Расчет спектров мощности. Вычисление спектров мощности методами Даныелла и Уэлча. Использование логарифмического масштаба. Децибел.

Расчет спектров мощности

Спектр мощности (*функция спектральной плотности*) наряду с корреляцией и статистическими моментами низких порядков является одной из наиболее распространенных и используемых характеристик сигналов. Однако ее вычисление, на практике, является нетривиальной задачей и не сводится к вычислению по реализации БПФ.

Рассмотрим реализацию процесса Гауссовского белого шума с 0 средним (рис. 5.1а). Периодограммы, построенные по первым 100 и первым 10000 значениям этого ряда, приведены на рис. 5.1б и рис. 5.1в соответственно. *Периодограммой* называется оценка спектра мощности с помощью ДПФ (или БПФ), сделанная по единственному участку реализации. Известно, что процесс белого шума имеет равномерный спектр, но из рис. 5.1б,в видно, что оценки спектра мощности, сделанные с помощью периодограмм, значительно отличаются от равномерного распределения. Более того, увеличение длины анализируемого участка реализации не приводит к увеличению точности оценки спектра. Вообще, показано, что, в общем случае, при наличии в сигнале шумов различной природы (что неизбежно при любых измерениях) оценка спектра мощности по периодограмме не является состоятельной, т.е. с увеличением длины реализации оценка спектра не стремится к истинной функции спектральной плотности. При расчете периодограмм по экспериментальным реализациям в них могут наблюдаться значительные по амплитуде флуктуации, вызванные присутствующими в сигнале шумами. Эти флуктуации могут быть ошибочно интерпретированы, как периодические составляющие. Кроме того, они затрудняют идентификацию спектральных составляющих, действительно присутствующих в сигнале. Поэтому, для улучшения оценки спектров, используют специализированные методы.

Наиболее часто используемые на практике подходы условно подразделяют на две группы: *периодограмные* (методы Даныелла, Уэлча и др.) и *параметрические методы* спектрального оценивания.

Показано, что спектр мощности сигнала может быть взаимнооднозначным образом получен из параметров a_i и b_i описывающей временной ряд авторегрессионной модели:

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x_{n-i} + \sum_{i=0}^{M-1} b_i \eta_{n-i} + \eta_{n+1}. \quad (5.1)$$

Коэффициенты модели могут быть оценены, например, с помощью *метода наименьших квадратов (МНК)*. На этом свойстве основаны параметрические методы спектрального оценивания. Параметрические методы дают, в общем случае, более точные оценки спектров мощности и позволяют добиться лучшего спектрального разрешения, чем периодограмные подходы, особенно при анализе коротких реализаций. Параметрические методы применимы для оценки спектров неэквидистантных реализаций. Основную сложность при их использовании представляет предварительный выбор структуры модели (величин N и M), что является нетривиальной задачей. Кроме того, эти методы более сложны в алгоритмической реализации.

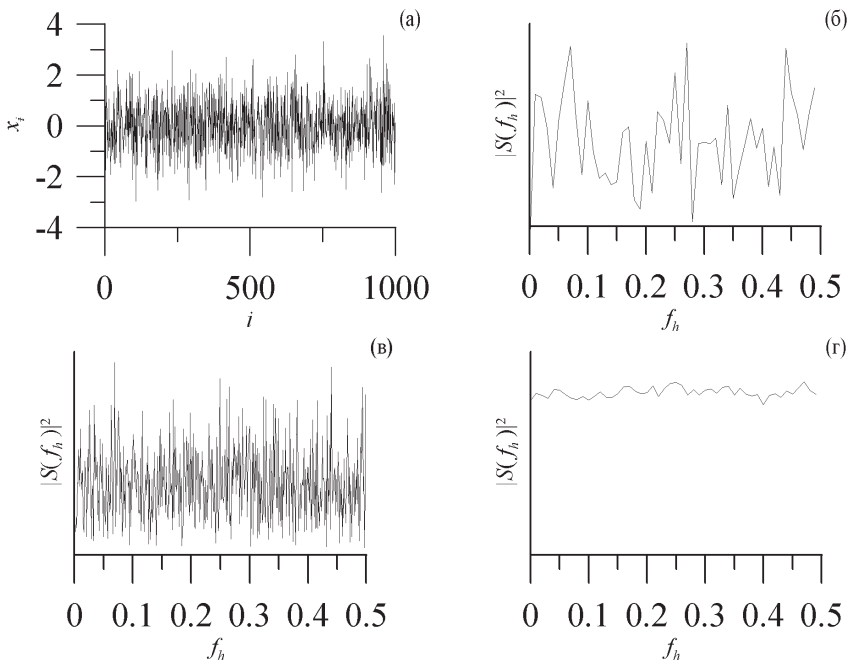


Рис. 5.1 Оценка спектра мощности белого шума. (а) – Участок временной реализации белого шума. (б) – Периодограмма, построенная по 100 первым значениям реализации. (в) – Периодограмма, построенная по 10000 первым значениям реализации. Видно, что увеличение длины ряда привело к улучшению спектрального разрешения. Видно также, что спектр не сходится к равномерному при увеличении длины реализации, так как оценка спектра с помощью периодограммы несостоятельна. (г) – Оценка спектра с помощью метода Уэлча (ряд разбит на 100 не перекрывающихся окон шириной по 100 отсчетов, оконное преобразование - прямоугольное окно). Видно, что функция спектральной плотности приближается к равномерному распределению по частотам.

Вычисление спектров мощности методами Даныелла и Уэлча

Метод оценки спектра мощности Даныелла заключается в сглаживании периодограммы с помощью усреднения ее скользящим окном:

$$\begin{cases} |\hat{S}(f_h)|^2 = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=h-n}^{h+n} |\hat{S}_p(f_i)|^2, & h \in [n, M-n-1], \\ |\hat{S}(f_h)|^2 = |\hat{S}_p(f_p)|^2, & h \notin [n, M-n-1]. \end{cases} \quad (5.2)$$

Здесь $|\hat{S}(f_h)|^2$ - спектр мощности, $|\hat{S}_p(f_h)|^2$ - периодограмма, $2n-1$ - ширина окна усреднения (чем шире окно, тем сильнее сглаживание), M - число гармоник, h - номер гармоники. Метод Даныелла позволяет уменьшить флуктуации в спектрах, вызванные присутствующими в сигналах шумами. Платой за это является расплывание пиков, соответствующих периодическим составляющим.

Лучшими свойствами оценки спектров обладает широко используемый на практике метод Уэлча.

При решении методами ЦОС практических задач почти никогда недоступен ансамбль реализаций и оценка спектров мощности осуществляется по единственной реализации. Поэтому, в ЦОС расчет среднего по ансамблю (набору сигналов,

порожденных одной системой) заменяют усреднением по времени по единственному сигналу. Если такая замена возможна, говорят, что сигнал обладает свойством эргодичности.

Уэлч предложил, предполагая эргодичность сигнала, уменьшать флуктуации оценки спектра с помощью усреднения периодограмм, рассчитываемых по единственной реализации в скользящем окне. Метод Уэлча может быть реализован с помощью следующего алгоритма (рис. 5.2):

- 1) временной ряд разбивается на окна шириной W_N со сдвигом W_S (в приведенном примере, ряд разбит на 5 окон, сдвиг равен половине окна), число окон

$$C = \left\lfloor \frac{N - W_N}{W_S} \right\rfloor + 1;$$

- 2) с каждым из окон для уменьшения эффекта утечки осуществляется оконное преобразование: $y_i^k = x_i \cdot w_i$, где k - номер окна, $k = 0, C-1$;
- 3) по полученным реализациям $\{y_i^k\}$ с помощью БПФ строятся периодограммы

$$|\hat{S}_p^k(f_h)|^2;$$

- 4) спектр оценивается как результат усреднения периодограмм:

$$|\hat{S}(f_h)|^2 = \frac{1}{C} \sum_{k=0}^{C-1} |\hat{S}_p^k(f_h)|^2.$$

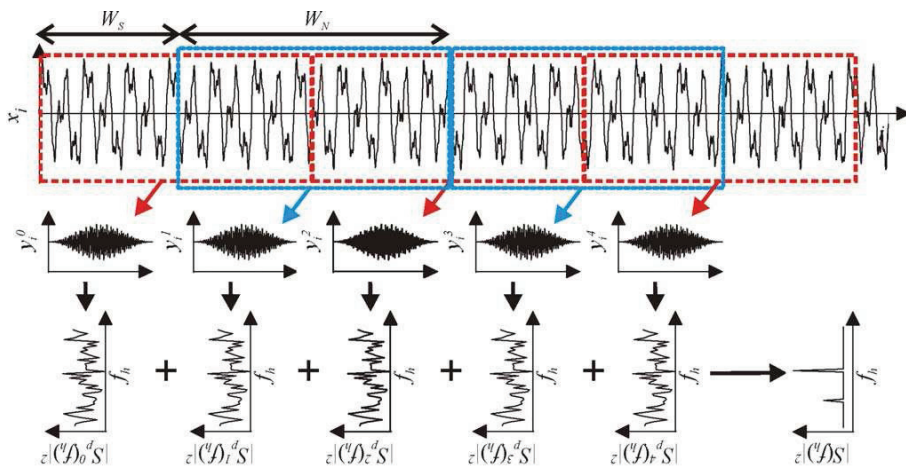


Рис. 5.2 Иллюстрация алгоритма оценки спектра мощности с помощью метода Уэлча.

При использовании метода Уэлча необходимо выбирать значения параметров W_N , W_S и C . В общем случае, чем больше окон используется для усреднения (т.е. чем меньше величина сдвига W_S при фиксированной длине N реализации), тем менее выражены в спектре флуктуации, обусловленные шумом. Использование окон с перекрытиями может существенно увеличить время расчетов. С увеличением ширины окна W_N , улучшается спектральное разрешение, но уменьшается (при фиксированной длине реализации) количество окон, для усреднения. На практике W_N обычно выбирают, чтобы обеспечить требуемое по постановке задачи спектральное разрешение. Сдвиг W_S чаще берут равным

ширине окна или $W_N/2$, а количество окон C в интервале 3-10, но вообще два последних параметра могут варьироваться в широких пределах.

Применение метода Уэлча требует относительно длинных временных рядов. В случаях, если длина реализации ограничена или время, в течение которого сигнал можно считать стационарным, невелико, для оценки спектров приходится применять метод Даньелла или параметрический подход.

Показано, что спектр линейной системы может быть однозначным образом получен из коэффициентов авторегрессионной модели, подогнанной по временной реализации исследуемой системы, с помощью, например, метода наименьших квадратов. Параметрические методы спектрального оценивания основаны на этом свойстве. Параметрические методы могут дать лучшие оценки спектров, чем метод Уэлча, особенно, по коротким реализациям. Другим плюсом является возможность оценки спектра по неэквидистантным рядам. Существенным препятствием на пути практического использования этих подходов является необходимость выбора структуры модельного уравнения, что является нетривиальным вопросом.

Использование логарифмического масштаба. Децибел

В современной технической и справочной литературе часто используется понятие *децибела*. Децибел не является физической величиной. Это безразмерная математическая конструкция, которая, как и проценты, служит для сопоставления двух одноименных величин. Важно отметить, что хотя бели и децибелы пригодны для численной характеристики различных физических величин, термин “децибел” всегда связывают только с энергетическими величинами, чаще всего с мощностью и, с некоторыми оговорками, с ее составляющими – напряжением и током. При использовании подобных единиц для оценки других явлений, часто используют одинаковые формулы, но говорят о рассмотрении отношения величин в логарифмическом масштабе, не используя термин “децибел”. На практике рассмотрение отношения величин в логарифмическом масштабе оказывается удобным в случаях отображения графиков величин, мощности которых значительно отличаются (в десятки и более раз), в этом случае, построение графика (например, спектра мощности) в логарифмическом масштабе может существенно упростить визуальное восприятие информации (рис. 5.3). Другое полезное свойство дБ – возможность на этапе промежуточных расчетов заменить умножение и деление сложением и вычитанием.

Нужно понимать, что использование логарифмического масштаба не дает дополнительной информации о сигнале. Основное его применение – упрощение (в некоторых случаях) восприятия человеком графической информации и ускорение некоторых расчетов, производимых “в уме”. Таким образом, при автоматическом анализе сигналов на ЭВМ, обычно, не имеет смысла переходить на этапе расчетов к логарифмическому масштабу. Он может оказаться полезным при отображении результатов.

Децибел (дБ, dB), как показывает приставка “деци”, составляет десятую часть другой, более крупной единицы – бел, названной в честь изобретателя телефона Александра Грехема Белла. Бел это десятичный логарифм отношения двух мощностей:

$$N_B = \lg \frac{P_2}{P_1}. \quad (5.3)$$

Физическая природа P_1 и P_2 не оговаривается и может быть любой: электрической, электромагнитной, механической, акустической и др., важно лишь, чтобы обе величины были выражены в одинаковых единицах: ваттах, милливаттах и т.п.

Для практики бел слишком крупная единица и даже большие отношения мощности выражаются малым числом бел. Например, если $\frac{P_2}{P_1} = 100$, то $N_B = \lg 100 = 2$, а для

$\frac{P_2}{P_1} = 1000$, то $N_B = 3$, т.е. любые отношения мощностей в границах от 100 до 1000 укладываются в пределах 1 Б: от 2 Б до 3 Б. Более удобно оказывается пользоваться в 10 раз меньшей величиной – децибелом:

$$N_{дБ} = 10 \lg \frac{P_2}{P_1}. \quad (5.4)$$

Действия с децибелами не отличаются от операций с логарифмами: сумма чисел, выраженных в дБ эквивалентна произведению отношений мощности, разность в дБ характеризует отношение этих величин.

Подсчитаем, какому отношению мощностей соответствует 1 дБ:

$$1 = 10 \lg \frac{P_2}{P_1}, \lg \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{10}, \frac{P_2}{P_1} = 10^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{10} \approx 1.259,$$

т.е. 1 дБ характеризует увеличение первоначальной мощности в 1.259 раза (примерно, на 26%).

$$2 \text{ дБ} = 1 \text{ дБ} + 1 \text{ дБ}, \text{ что соответствуют } \frac{P_2}{P_1} = 1.259 \cdot 1.259 = 1.259^2 \approx 1.585.$$

Для отрицательных дБ:

$$-1 \text{ дБ} = 10 \lg \frac{P_2}{P_1}, \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{\sqrt[10]{10}} \approx \frac{1}{1.259} \approx 0.794.$$

Положительными дБ обычно выражают увеличение мощности (например, коэффициент усиления усилителя), отрицательными – уменьшение мощности (например, ослабление фильтром частотных составляющих).

Можно составить таблицу:

$N_{дБ}, \text{ дБ}$	$\frac{P_2}{P_1}$	$N_{дБ}, \text{ дБ}$	$\frac{P_2}{P_1}$
1	1.259	-1	0.794
2	1.585	-2	0.631
3	1.995	-3	0.501
4	2.512	-4	0.398
5	3.161	-5	0.316
6	3.981	-6	0.251
7	5.012	-7	0.200
8	6.310	-8	0.159
9	7.943	-9	0.126
10	10.000	-10	0.100

с помощью которой, пользуясь свойствами логарифмов, можно без труда переводить дБ в единицы отношения мощностей.

Пример типичной задачи: некая система представляет собой каскад из 2 усилителей, обеспечивающих усиление мощности по 20 дБ каждый, после усилительного каскада сигнал передается по кабелю, длиной 80 м. На интересующей частоте коэффициент затухания кабеля составляет -0.1 дБ/м. Определить отношение мощностей на выходе и входе системы. Решение: изменение мощности сигнала составит: $N_{дБ} = 20 \text{ дБ} + 20 \text{ дБ} + (-0.1 \text{ дБ/м} \cdot 80 \text{ м}) = 40 \text{ дБ} - 8 \text{ дБ} = 32 \text{ дБ}$, где первые 2 слагаемых соответствуют 2 усилителям в усилительном каскаде, а третье слагаемое описывает ослабление сигнала в отрезке кабеля. Пользуясь вышеприведенной таблицей, переведем дБ в единицы отношения

мощностей: $32 \text{ дБ} = 10 \text{ дБ} + 10 \text{ дБ} + 10 \text{ дБ} + 2 \text{ дБ}$, что соответствует $\frac{P_2}{P_1} = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1.585 = 1000 \cdot 1.585 = 1585$.

Логарифмический масштаб часто используется при построении графиков спектров мощности. При этом обычно строится логарифм отношения мощностей спектральных составляющих к мощности максимальной составляющей (рис. 5.3).

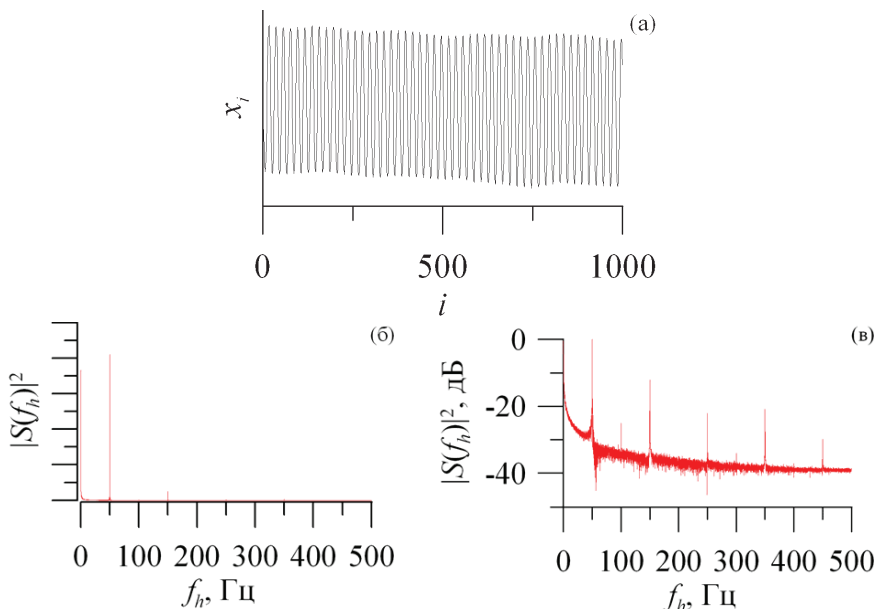


Рис. 5.3 Пример использования логарифмического масштаба. Наиболее мощная 50 Гц составляющая реализации –(а), а также низкочастотный тренд затрудняют визуальный анализ спектра в линейном масштабе –(б). (в) –Построение спектра мощности в логарифмическом масштабе существенно облегчает его визуальный анализ.

Лекция 6. Разделение сигналов в частотной области. Свертка

Разделение сигналов в частотной области. Свертка. Свойства свертки.

Разделение сигналов в частотной области

Частотно-избирательным фильтром (filter) называют систему, выборочно подавляющую составляющие сигнала в частотной области. Выделяют 4 вида фильтров:

- фильтр низких (нижних) частот (**ФНЧ, low-pass filter**) – подавляет спектральные составляющие в полосе $[F_{\text{cutoff}}, F_H]$ Гц,
- фильтр высоких (верхних) частот (**ФВЧ, high-pass filter**) – подавляет спектральные составляющие в полосе $[0, F_{\text{cutoff}}]$ Гц,
- режекторный фильтр (**ПФ, band-stop filter, rejector filter**) – подавляет спектральные составляющие в полосе $[F_{\text{cutoff1}}, F_{\text{cutoff2}}]$ Гц,
- полосовой фильтр (**ПФ, band-pass filter**) – подавляет все спектральные составляющие вне полосы $[F_{\text{cutoff1}}, F_{\text{cutoff2}}]$ Гц.

Частоты, ограничивающие полосы пропускания и подавления: F_{cutoff} , F_{cutoff1} и F_{cutoff2} называют **частотами среза**.

Фильтрация предназначена для решения ряда задач. Важным приложением является разделение полезных сигналов, спектры которых сосредоточены в разных полосах частот. Сигналы могут быть смешаны, например, для эффективной передачи по каналу связи. Полезные сигналы могут оказаться смешаны в силу принципиальной неразделимости породивших их систем. Последнее типично для систем биологической природы. Актуальным приложением фильтрации является также “очистка” полезного сигнала от шумов и помех различной природы (рис. 6.1).

Одним из наиболее наглядных способов фильтрации является непосредственное обнуление спектральных составляющих, лежащих в полосах подавления фильтра. На языке математики такое обнуление эквивалентно перемножению в частотной области периодограммы обрабатываемого сигнала с оконной функцией $H(f_h)$:

$$H(f_h) = \begin{cases} 1, & f_h \in [f_{\text{cutoff}1}, f_{\text{cutoff}2}], \\ 0, & f_h \notin [f_{\text{cutoff}1}, f_{\text{cutoff}2}]. \end{cases} \quad (6.1)$$

График такой функции отличается резкими границами между полосами пропускания и подавления (рис. 6.1д), поэтому, фильтры, использующие такую $H(f_h)$ называют **прямоугольными**. На рис. 6.1 представлен пример фильтрации временной реализации ЭКГ с помощью прямоугольного фильтра (6.1), где $f_{\text{cutoff}1} = 0.5$ Гц, $f_{\text{cutoff}2} = 20$ Гц. На практике использование резких срезов в частотной области может привести к артефактам во временной области, поэтому, $H(f_h)$ часто выбирают не прямоугольной, а более плавной.

Алгоритм фильтрации:

1. исходя из постановки задачи, выбираются ширина и расположение в частотной области полос пропускания и подавления, определяются конкретные значения частот среза и строится оконная функция $H(f_h)$, например, в виде (6.1);
2. с помощью БПФ рассчитывается Фурье-образ $S^{in}(f_h) = F[x(t)]$ исходной реализации $\{x(t)\}$;
3. рассчитывается Фурье-образ выходного сигнала: $S^{out}(f_h) = H(f_h) \cdot S^{in}(f_h)$;
4. для получения выходного (отфильтрованного) цифрового сигнала $\{y(t)\}$ осуществляется обратное БПФ $S^{out}(f_h)$: $x(t) = F^{-1}[S^{out}(f_h)]$.

На рисунке 6.1 представлен пример использования фильтрации прямоугольным фильтром при обработке электрокардиограммы. Ряд ЭКГ $\{x_i\}$ регистрировался 24 битным АЦП кардиомонитора с частотой выборки 50 Гц. На рис. 6.1а виден медленный тренд сигнала, вызванный, преимущественно, электрохимическими процессами, протекающими при контакте кожи с регистрирующими электродами. На рис. 6.1б приведен участок реализации исходной ЭКГ в увеличенном масштабе. Хорошо видны высокочастотные составляющие сигнала, привнесенные, преимущественно, воздействием электромагнитных наводок силовой электрической сети и окружающего оборудования на электрические провода, электроды и аналоговую часть электронной схемы кардиомонитора. Шумы и наводки могут существенно затруднить визуальный и автоматический анализ сигнала, привести к ошибкам работы диагностических алгоритмов. Полосовая фильтрация сигнала в полосе 0.5-20 Гц позволяет удалить из ЭКГ как низкочастотный тренд (рис. 6.1в), так и высокочастотные шумы и наводки (рис. 6.1г). Фильтрация осуществлялась с помощью умножения периодограммы $\hat{S}(f_h)$ (рис. 6.1е) сигнала $\{x_i\}$ на прямоугольную оконную функцию (т.е. обнуления всех Фурье-гармоник периодограммы, соответствующих частотам ниже 0.5 Гц или выше 20 Гц). (рис. 6.1д).

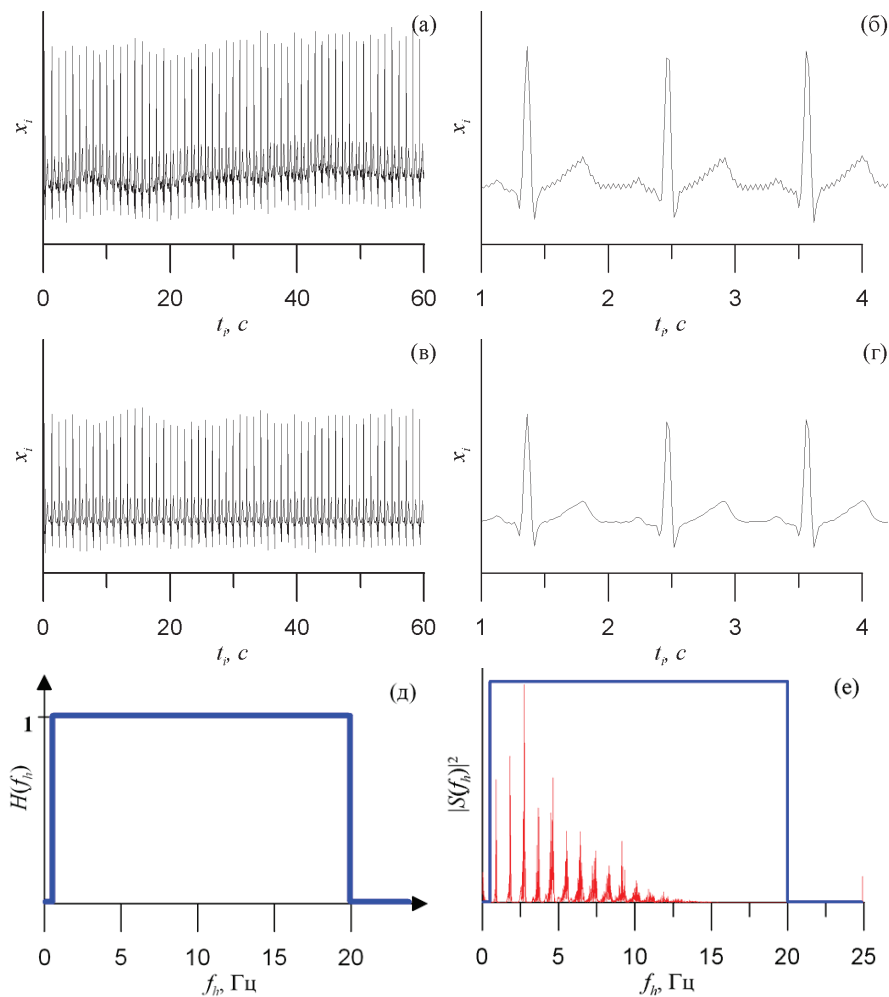


Рис. 6.1 Очистка временного ряда ЭКГ от шумов и наводок различной природы. (а)-Участок исходной временной реализации демонстрирует наличие низкочастотного тренда, обусловленного в основном электрохимическими процессами, протекающими на границе кожа-электрод. (б)-Исходная реализация в увеличенном масштабе. Видны “зубурны” – высокочастотные составляющие, порожденные шумами и наводками. Фильтрация сигнала с помощью прямоугольного фильтра (ПФ 0.5-20 Гц) позволяет удалить медленный тренд –(в) и высокочастотные наводки –(г). (д)- оконная функция в частотной области фильтра. (е)- Периодограмма исходного ряда на фоне оконной функции.

Представленный способ разделения сигналов в частотной области благодаря использованию БПФ отличается относительно высоким быстродействием, он достаточно прост для понимания и реализации и позволяет произвольным образом изменять периодограмму входного сигнала (например, реализовать многополосную фильтрацию).

Вместе с тем, этот способ неприменим для обработки сигналов в реальном времени и способен, особенно при узкополосной фильтрации, вносить в сигнал специфические

искажения, которые особенно выражены на краях отфильтрованного сигнала – **краевые эффекты**.

Для уменьшения влияния таких искажений используют $H(f_h)$, имеющую не прямоугольную форму, а более плавные переходы между полосами пропускания и подавления. Также предлагается исключать из дальнейшего анализа участки фильтрованного сигнала, наиболее подвергшиеся краевым эффектам фильтрации (отбрасываются участки длиной по 10-100 характерных периодов колебаний в начале и в конце реализации).

Для фильтрации сигналов в реальном времени применяют специальные цифровые фильтры, речь о которых пойдет ниже.

Свертка

Сверткой (convolution) двух (в общем случае, бесконечных) временных рядов $\{h_i\}$ и $\{x_i\}$ называют операцию вида:

$$y_i = h_i * x_i = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{i-k} \quad (6.2)$$

Далее будем полагать, что обрабатываемые реализации **причинны**, т.е. $\forall x_i = 0, i < 0$. Соответственно, для (6.1):

$$x_{i-k} = 0, i - k < 0. \quad (6.3)$$

Свертка является одной из наиболее широко используемых операций ЦОС. Многие современные микроконтроллеры и цифровые сигнальные процессоры, предназначенные для эффективного решения задач ЦОС, содержат специальные команды и аппаратные модули, предназначенные для быстрой реализации операции свертки.

В качестве примера, рассчитаем свертку $\{y_i\}$ бесконечной последовательности последовательностей $\{h_k\}$, заданной, как:

$$h_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 2, & k = 1, \\ 1, & k = 2, \\ 0, & k \notin \{0, 1, 2\}, \end{cases} \quad (6.4)$$

(рис. 6.2б) и временного ряда $\{x_i\} = \{1, 2, 1, 3, 1\}$ (рис. 6.2а).

Воспользовавшись формулой (6.2) и учитывая условие (6.3), получим:

$$\begin{aligned} y_{i=0} &= h_{k=0}x_{i-0} + h_{k=1}x_{i-1} + h_{k=2}x_{i-2} + h_{k=3}x_{i-3} + h_{k=4}x_{i-4} + \dots + h_{k=\infty}x_{i-\infty} = \\ &= h_0x_0 + h_1x_{-1} + h_2x_{-2} + 0 \cdot x_{-3} + 0 \cdot x_{-4} + \dots + 0 \cdot x_{-\infty} = h_0x_0 + h_1x_{-1} + h_2x_{-2} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 1 \end{aligned}$$

В данном случае, последовательность $\{h_k\}$ имеет только 3 отличных от 0 значения, поэтому, при суммировании, с помощью формулы (6.2) можно ограничиться 3 слагаемыми, используя модификацию (6.2) на случай последовательности конечной длины:

$$y_i = h_i * x_i = \sum_{k=0}^{M-1} h_k x_{i-k}, \quad (6.5)$$

где $M < \infty$ - длина $\{h_k\}$.

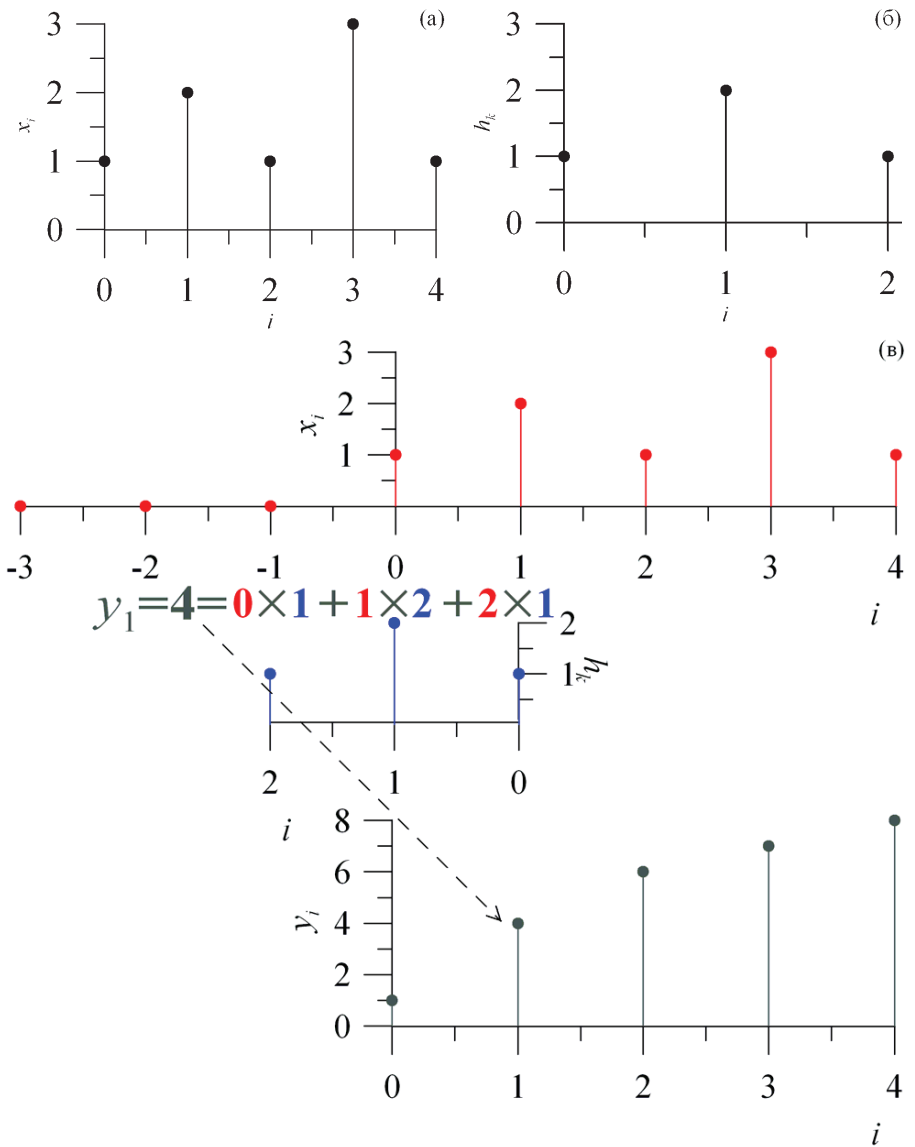


Рис. 6.2 (а)- Временная реализация $\{x_i\}$. (б)- Импульсная характеристика $\{h_k\}$ некой системы. (в)- Схематическое изображение реализации свертки $h_i * x_i$, т.е. получения отклика $\{y_i\}$ исследуемой системы на воздействие сигнала $\{x_i\}$ на примере расчета $y_{i=1}$.

Тогда:

$y_{i=1} = h_{k=0}x_{i-0} + h_{k=1}x_{i-1} + h_{k=2}x_{i-2} = h_0x_1 + h_1x_0 + h_2x_{-1} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 4$, пример расчета свертки для вычисления $y_{i=1}$ схематически представлен на рис. 6.2в.

$$y_{i=2} = h_0 x_2 + h_1 x_1 + h_2 x_0 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6,$$

$$y_{i=3} = h_0 x_3 + h_1 x_2 + h_2 x_1 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 7 \text{ и}$$

$$y_{i=4} = h_0 x_3 + h_1 x_2 + h_2 x_1 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 8,$$

Таким образом, при подаче на вход исследуемой системы временной реализации $\{x_i\}$, на выходе системы будет получен ряд $\{y_i\} = \{1, 4, 6, 7, 8\}$.

Свойства свертки

1. Свойство коммутативности свертки:

$$x_i * y_i = y_i * x_i. \quad (6.6)$$

2. Свойство дистрибутивности свертки:

$$x_i * (y_i + z_i) = x_i * y_i + x_i * z_i. \quad (6.7)$$

3. Свойство ассоциативности свертки:

$$x_i * (y_i * z_i) = (x_i * y_i) * z_i. \quad (6.8)$$

4. **Теоремы о свертке**

Свертка 2 последовательностей во временной области эквивалентна умножению их образов в частотной:

$$x_i * y_i = F^{-1}[X(f_h) \cdot Y(f_h)] \text{ и} \quad (6.9)$$

и умножение последовательностей во временной области эквивалентно свертке их Фурье-образов:

$$x_i \cdot y_i = F^{-1}[X(f_h) * Y(f_h)]. \quad (6.10)$$

$X(f_h)$ и $Y(f_h)$ - Фурье-образы последовательностей $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$, соответственно.

Свойство (6.9) лежит в основе реализации операции т.н. **быстрой свертки**. Алгоритм быстрой свертки последовательностей $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$:

1. С помощью БПФ рассчитываются Фурье-образы $X(f_h)$ и $Y(f_h)$ последовательностей $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$,
2. Фурье-образы перемножаются,
3. свертка последовательностей находится как обратное БПФ от произведения их Фурье-образов $X(f_h) \cdot Y(f_h)$.

Быстродействие алгоритма быстрой свертки соотносится со скоростью работы метода непосредственного расчета свертки (6.2), аналогично БПФ и ДПФ.

Лекция 7. Основные понятия теории дискретных линейных систем

Основные понятия теории дискретных линейных систем. Цифровые фильтры. Типы цифровых фильтров. Структурные схемы фильтров. Z-преобразование. Свойства z-преобразования.

Основные понятия теории дискретных линейных систем

Дискретная система является по существу алгоритмом преобразования одной временной реализации - $\{x_i\}$ (рис. 7.1), называемой **входной**, в другую - $\{y_i\}$, называемую **выходной** последовательностью или **откликом**. Функционально они связаны соотношением:

$$y_i = P[x_i], \quad (7.1)$$

где P -линейный оператор.

Линейность системы P означает, что для ее математического описания не требуется использование нелинейных уравнений. Линейность является важным свойством, позволяющим применять для анализа систем хорошо разработанную теорию. Методы

исследования нелинейных систем рассматриваются *нелинейной динамикой*. Теория нелинейных систем существенно более сложна, многие ее задачи не имеют решений в общем виде.

Нужно понимать, что строго линейные системы в природе и технике почти не встречаются, но оказывается, что во многих случаях нелинейностью можно пренебречь и применять для исследования таких системы хорошо разработанную линейную теорию.

Одним из основных свойств линейности является *принцип суперпозиции*: если $\{x_i^1\}$ и $\{x_i^2\}$ - входные временные ряды линейной системы, а $\{y_i^1\}$ и $\{y_i^2\}$ - соответствующие им выходные, то при подаче на вход системы $\{ax_i^1 + bx_i^2\}$, где $a, b \in R$ на выходе будет получена $\{ay_i^1 + by_i^2\}$.

Система с постоянными параметрами характеризуется тем, что если входной реализации $\{x_i\}$ соответствует выходная $\{y_i\}$, то, для $\forall i_0 \in Z$ ряду $\{x_{i-i_0}\}$ будет соответствовать $\{y_{i-i_0}\}$.

Импульсной характеристикой (ИХ) дискретной системы называют временной ряд $\{h_k\}$, представляющую собой отклик этой системы на единичный δ -импульс. Т.е. ИХ представляет собой последовательность, получаемую на выходе исследуемой системы после подачи на ее вход временной реализации $\delta(i) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 0, & i \neq 0, \end{cases}$ $i = -\infty, \infty, i \in Z$. Доказано,

что ИХ содержит всю информацию о линейной системе. Если известна ИХ $\{h_k\}$ системы, то отклик этой системы $\{y_i\}$ при подаче на нее произвольной реализации $\{x_i\}$ может быть однозначным образом вычислен с помощью свертки:

$$y_i = h_i * x_i. \quad (7.2)$$

Все линейные системы делятся на 2 больших класса: системы с *конечной импульсной характеристикой (КИХ, finite impulse response, FIR)*, у которых $h_k = 0$ при $\forall k > M, M \in Z$, для расчета отклика таких систем можно воспользоваться (6.5) и системы с *бесконечной импульсной характеристикой (БИХ, infinite impulse response, IIR)*, для которых указанное условие не выполняется, поэтому, для них нужно использовать (6.2). В природе и радиотехнике встречаются преимущественно БИХ системы, однако, КИХ системы обладают рядом привлекательных свойств и зачастую их проще реализовать в системах ЦОС.

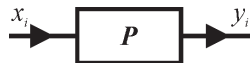


Рис 7.1 Схематическое изображение дискретной системы P.

Цифровые фильтры

Цифровым фильтром (ЦФ, digital filter) будем называть дискретную линейную систему (алгоритм), выборочно меняющую амплитудно-частотную характеристику сигнала.

Цифровые фильтры играют в обработке сигналов важную роль. По сравнению с радиотехническими аналоговыми фильтрами они оказываются предпочтительнее при решении большого числа задач: сжатие данных, обработка биомедицинских сигналов, обработка речи, передача данных и др. Такая широкая область применения объясняется рядом их преимуществ:

- ЦФ могут иметь характеристики, получить которые с использованием аналоговых устройств невозможно, например, действительно линейную фазо-частотную характеристику.
- В отличие от аналоговых систем, параметры ЦФ не подвержены влиянию окружающей среды (температура, влажность и т.п.).
- Реализованные на базе микроконтроллеров и сигнальных процессоров ЦФ позволяют осуществлять программируемую перестройку параметров, реализуя т.н. **адаптивные фильтры**, подстраивающие свои параметры в зависимости от свойств обрабатываемого сигнала.
- Один цифровой фильтр может обрабатывать несколько каналов данных без дублирования аппаратных блоков.
- Используя современную элементную базу, удается создавать малогабаритные и дешевые фильтры с низкой потребляемой мощностью.
- ЦФ позволяют достичь лучшей точности и большего затухания в полосе подавления.
- Для некоторых приложений важно иметь набор фильтров с очень близкими свойствами, чего трудно добиться для аналоговых устройств. Системы ЦОС позволяют без труда создавать практически идентичные устройства.
- ЦФ могут использоваться на очень низких частотах, характерных, например, для биомедицинских приложений, когда использование аналоговых устройств оказывается непрактичным.

Кроме несомненных достоинств, по сравнению с аналоговыми устройствами, ЦФ имеют и ряд недостатков:

- Применение систем ЦОС на высоких частотах затруднительно.
- Цифровые фильтры привносят в сигнал шумы дискретизации и искажения, обусловленные конечной разрядностью.
- ЦФ сложнее в разработке и внедрении. Вместе с тем, однажды разработанный ЦФ может использоваться в различных приложениях после минимальной модификации.

Типы цифровых фильтров

ЦФ, как и все системы ЦОС, делятся на 2 больших класса: фильтры с КИХ, описывающиеся уравнением (6.5), и фильтры с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ) (6.2). Показано, что уравнение, описывающее БИХ-фильтр, обычно удается переписать в рекурсивной форме, используя конечное количество членов:

$$y_i = \sum_{k=0}^{P-1} b_k x_{i-k} + \sum_{n=1}^Q a_n y_{i-n}, \quad (7.3)$$

где $a_n, b_k \in R$ - **коэффициенты рекурсивного фильтра**, $\{x_i\}$ - временной ряд на входе фильтра, $\{y_i\}$ - временной ряд на его выходе.

*В силу свойства (7.3) БИХ фильтров в литературе их иногда называют рекурсивными, а КИХ-фильтры - **нерекурсивными**, что не совсем корректно, т.к. в некоторых случаях КИХ фильтры также удается переписать в виде (7.3).*

Первым этапом проектирования ЦФ является выбор его типа: КИХ или БИХ. Этот выбор предопределяет свойства, которыми будет обладать создаваемая система и определяет выбор метода расчета фильтра. Поэтому, важно знать достоинства и недостатки фильтров каждого типа. Основные преимущества и недостатки фильтров различных типов сведены в таблице 7.1.

№	КИХ-фильтры	БИХ-фильтры
1.	Могут иметь строго линейную фазо-частотную характеристику, что важно для решения многих задач биомедицины, обработки звука и изображений и др.	Фазо-частотная характеристика всегда нелинейна, особенно, вблизи краев полос.
2.	Почти всегда реализуются нерекурсивно, поэтому, устойчивы.	Рекурсивная реализация может привести к самовозбуждению и неустойчивости.
3.	КИХ фильтры менее подвержены влиянию конечной разрядности.	Шум округления и ошибки квантования сильнее влияют на БИХ фильтры.
4.	Для получения крутых срезов в частотной области КИХ фильтр использует больше коэффициентов, чем БИХ.	Для одинакового количества коэффициентов БИХ фильтры позволяют получать более крутые переходные полосы между границами пропускания и подавления.
5.	КИХ фильтры невозможно реализовать с помощью аналоговых схем.	БИХ фильтры аппроксимируют аналоговые фильтры. Они могут использоваться для замены аналоговых фильтров на цифровые в уже созданных системах.
6.	Синтез КИХ фильтров алгебраически сложнее.	Существуют простые графические методы расчета простейших БИХ-фильтров.
7.	КИХ фильтры позволяют осуществлять антифильтрацию , пропуская сигнал в обратном времени.	Область применения БИХ фильтров ограничена, т.к. для рекурсивных уравнений прогноз сигнала в обратном времени в общем случае не дает последовательность, эквивалентную входной.

Таблица 7.1. Основные преимущества и недостатки КИХ- и БИХ-фильтров.

Учитывая вышеприведенные особенности использования, можно сформулировать общие рекомендации по выбору типа фильтра:

- Использовать БИХ фильтр, если основными требованиями к системе является ее вычислительная простота и необходимость получения крутого среза в частотной области. Типичная область применения – САУ технологическими и производственными процессами, построенные на дешевых низкоскоростных микроконтроллерах.
- Использовать КИХ фильтры в приложениях, требующих линейности фазо-частотной характеристики, особенно, если для реализации КИХ фильтра требуется умеренное число коэффициентов. Типичные области применения: обработка электрофизиологических сигналов, звука, телекоммуникационные системы, построенные на основе специализированных ЦСП или промышленных компьютеров.

Структурные схемы фильтров

Для наглядности в справочной литературе ЦФ часто представляют в виде структурных схем. Для описания линейного ЦФ в таких схемах используют 3 структурных элемента: сумматор (рис. 7.2а), усилитель (рис. 7.2б), и регистр, осуществляющий задержку сигнала на 1 дискретный временной шаг (рис. 7.2в).

В качестве примера на рис. 7.2 приведены структурные схемы: рекурсивного фильтра: $y_i = bx_i + ay_{i-1}$ (рис. 7.2г) и нерекурсивного фильтра:

$$y_i = \sum_{k=0}^4 b_k x_{i-k} = b_0 x_i + b_1 x_{i-1} + b_2 x_{i-2} + b_3 x_{i-3} + b_4 x_{i-4} \quad (\text{рис. 7.2д}).$$

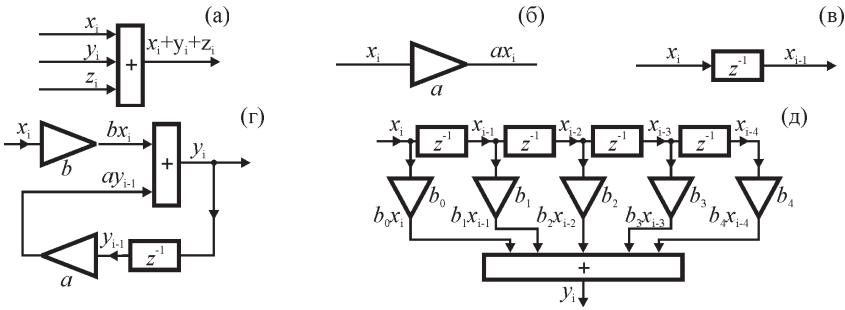


Рис. 7.2 Типичные обозначения элементов структурных схем фильтров: (а) – сумматор – на выходе элемента сумма входных сигналов; (б) – усилитель – умножает входной сигнал на заданную константу; (в) – элемент задержки (ячейка памяти, регистр) – задерживает входной сигнал на 1 дискретный отсчет. Примеры структурных схем: (г) – рекурсивного и (д) – нерекурсивного фильтров.

Z-преобразование

Z-преобразование является аналогом преобразования Лапласа для систем дискретного времени. Оно оказалось удобным средством описания, анализа и проектирования таких систем. При разработке ЦФ использование z-преобразования удобно для регуляции их устойчивости, исследования влияния ошибок квантования, расчета и визуализации частотных характеристик.

Z-преобразование задается как:

$$X(z) = Z[x_i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i z^{-i}, \quad z \in C, \quad (7.4)$$

где $z = Ae^{j\omega} = \alpha + j\beta$ (рис. 7.3). На практике обычно имеют дело с причинными последовательностями, для которых время не может быть отрицательной величиной (хотя рассмотрение случаев $i < 0$ иногда оказывается полезным при решении некоторых теоретических вопросов), поэтому, при анализе систем ЦОС используют т.н. **одностороннее z-преобразование**:

$$X(z) = Z[x_i] = \sum_{i=0}^{\infty} x_i z^{-i}, \quad z \in C. \quad (7.5)$$

В качестве примера, рассмотрим z-преобразование постоянной последовательности:

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \geq 0; \\ 0, & i < 0. \end{cases} \quad (7.6)$$

Очевидно, что z-преобразование последовательности (7.6) будет иметь вид:

$$X(z) = 1 \cdot z^{-0} + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + \dots = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \quad (7.7)$$

Видно, что выражение (7.7) для $|z| > 1$ представляет собой бесконечную убывающую геометрическую прогрессию, для которой, пользуясь известными правилами, можно вычислить сумму:

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}. \quad (7.8)$$

Значения z при которых $X(z)=0$ называют *нулями функции* $X(z)$, значения z для которых $X(z)=\infty$ называют *полюсами функции* $X(z)$. Например, для функции вида (7.8) имеется один ноль: $z=0$ и один полюс: $z=1$.

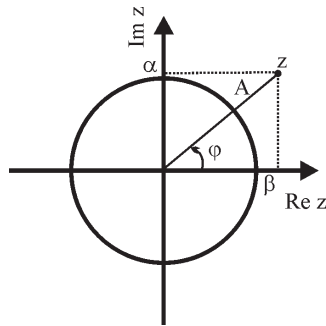


Рис. 7.3 Z-плоскость.

Поиск полюсов и нулей z -преобразования, а также анализ сходимости последовательностей являются важными этапами разработки и анализа ЦФ, позволяющими оценить устойчивость ЦФ, построить его частотную характеристику, исследовать влияние на фильтр эффектов конечной разрядности.

Подробнее знакомство с этими аспектами выходит за рамки лекционного курса.

В качестве примера в таблице 7.2 представлены Z -преобразования некоторых цифровых сигналов:

x_i	$X(z)$
$x_i = 1$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
$x_i = \delta(i)$	1
$x_i = i$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
$x_i = a^i$	$\frac{1}{1-az^{-1}}, a < 1$
$x_i = e^{j\omega i}$	$\frac{1}{1-e^{j\omega}z^{-1}}$
$x_i = \sin \omega i$	$\frac{(\sin \omega)z^{-1}}{z^{-2} - (2 \cos \omega)z^{-1} + 1}$
$x_i = \cos \omega i$	$\frac{(1 - \cos \omega)z^{-1}}{z^{-2} - (2 \cos \omega)z^{-1} + 1}$

Таблица 7.2. Z -преобразования некоторых цифровых сигналов.

Свойства z -преобразования

1. **Линейность:** если реализации $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ имеют z -преобразования $X(z)$ и $Y(z)$, соответственно, то:

$$Z[ax_i + by_i] = aX(z) + bY(z). \quad (7.9)$$

2. Сдвиг последовательности: если $Z[x_i] = X(z)$, то:

$$Z[x_{i-k}] = z^{-k} X(z). \quad (7.10)$$

3. Свертка последовательностей: пусть $Z[x_i^1] = X_1(z)$ и $Z[x_i^2] = X_2(z)$, а $y_i = x_i^1 * x_i^2$, причем $Z[y_i] = Y(z)$, тогда:

$$Y(z) = X_1(z) \cdot X_2(z). \quad (7.11)$$

4. Произведение последовательностей: пусть $Z[x_i^1] = X_1(z)$ и $Z[x_i^2] = X_2(z)$, а $y_i = x_i^1 \cdot x_i^2$, причем $Z[y_i] = Y(z)$, тогда:

$$Y(z) = X_1(z) * X_2(z). \quad (7.12)$$

5. Преобразование Фурье $X(e^{j\omega})$ реализации $\{x_i\}$ является частным случаем z-преобразования $X(z)$ этого ряда с $z = e^{j\omega}$ (i -дискретное время):

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}. \quad (7.13)$$

Лекция 8. Передаточная функция и частотные характеристики

Решение разностных уравнений. Передаточная функция. Связь передаточной функции с импульсной характеристикой. Соединение фильтров и их структурные схемы. Критерий устойчивости. Частотные характеристики. Нормировка частоты.

Решение разностных уравнений

Одним из широко используемых применений z-преобразований является решение разностных уравнений вида:

$$\sum_{n=0}^Q a_n y_{i-k} = \sum_{k=0}^{P-1} b_k x_{i-k}. \quad (8.1)$$

(8.1) сводится к уравнению рекурсивного фильтра (7.2) при $a_0 = 1$.

Применим к обеим частям уравнения (8.1) z-преобразование, учитывая свойства (7.9) и (7.10):

$$Y(z) \sum_{n=0}^Q a_n z^{-n} = X(z) \sum_{k=0}^{P-1} b_k z^{-k}, \quad (8.2)$$

или, сделав замену и учтя, что $a_0 = 1$:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{P-1} b_k z^{-k}}{\sum_{n=0}^Q a_n z^{-n}} = \frac{\sum_{k=0}^{P-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{n=1}^Q a_n z^{-n}}, \quad (8.3)$$

получим:

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z). \quad (8.4)$$

Тогда, осуществляя обратное z-преобразование, по известной входной реализации $\{x_i\}$ можно рассчитать реализацию $\{y_i\}$ на выходе фильтра.

В качестве примера рассмотрим решение разностного уравнения:

$$y_i = x_i + 0.5y_{i-1}, \quad (8.5)$$

описывающее рекурсивный фильтр.

1. Преобразуем (8.5) к виду (8.1):

$$y_i - 0.5y_{i-1} = x_i. \quad (8.6)$$

2. Осуществим z-преобразование обеих частей уравнения:

$$Y(z) - 0.5z^{-1}Y(z) = X(z), \quad (8.7)$$

3. преобразуем (8.7):

$$Y(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} X(z). \quad (8.8)$$

4. Пусть $x_i = \delta(i)$, тогда (см. таблицу 7.2): $X(z) = 1$ и $y_i = 0.5^i$.

Передаточная функция

Передаточной функцией (transfer function, transmission function) фильтра называют отношение:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}, \quad (8.9)$$

где $X(z)$ – z-преобразование временного ряда на входе фильтра, $Y(z)$ – на его выходе.

Например, если $\{x_i\} = \{1, -1, 0.5\}$, а отклик $\{y_i\} = \{1, 2, 1\}$, то $X(z) = 1 \cdot z^{-0} + (-1) \cdot z^{-1} + 0.5 \cdot z^{-2} = 1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}$, $Y(z) = 1 \cdot z^{-0} + 2 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$, тогда:

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}} \quad (8.10)$$

Связь передаточной функции с импульсной характеристикой

Учитывая свойство импульсной характеристики линейной дискретной системы (7.2) и свойство z-преобразования (7.11) из (8.4) видно, что импульсная характеристика $\{h_i\}$ и передаточная функция $H(z)$ системы связаны соотношением:

$$H(z) = Z[h_i]. \quad (8.11)$$

Передаточная функция рекурсивного фильтра, в общем случае, имеет вид (8.3). Выход нерекурсивного фильтра зависит только значений на его входе, т.е. $\forall a_i = 0$, поэтому, передаточная характеристика нерекурсивного фильтра имеет вид:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{P-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{n=1}^Q 0 \cdot z^{-n}} = \sum_{k=0}^{P-1} b_k z^{-k}. \quad (8.12)$$

Сопоставляя (8.11) и (8.12) и осуществляя обратное z-преобразование:

$$Z^{-1}[X(z)] = x_i, \quad (8.13)$$

видно, что набор коэффициентов нерекурсивного фильтра $\{b_k\}$ одновременно является и его импульсной характеристикой.

Для получения в явном виде импульсной характеристики рекурсивного фильтра удобно представить передаточную характеристику (8.3) в виде, аналогичном (8.12):

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k}, \quad (8.14)$$

где, в отличие от (8.12) сумма, в общем случае, будет содержать бесконечное количество ненулевых слагаемых (в силу чего, фильтры и получили названия КИХ и БИХ).

Для преобразования (8.3) к виду (8.14) используют один из трех методов: *метод разложения в степенной ряд*, *метод вычетов* или *метод разложения на элементарные дроби*. Каждый из перечисленных методов имеет достоинства и недостатки, определяющие его выбор для решения конкретной задачи. Наиболее простым и понятным является метод разложения в степенной ряд. Он может быть реализован

путем непосредственного деления “в столбик” многочленов от z , стоящих в числителе и знаменателе $H(z)$ (8.3).

Например, для (8.10):

$$\begin{array}{r} 1+2z^{-1}+z^{-2} \Big| 1-z^{-1}+0.5z^{-2} \\ \underline{1-z^{-1}+0.5z^{-2}} \\ 3z^{-1}+0.5z^{-2} \\ \underline{3z^{-1}-3z^{-2}+1.5z^{-3}} \\ 3.5z^{-2}-1.5z^{-3} \\ \underline{3.5z^{-2}-3.5z^{-3}+1.75z^{-4}} \\ 2z^{-3}-1.75z^{-4} \\ \underline{2z^{-3}-2z^{-4}+z^{-5}} \\ 0.25z^{-4}-z^{-5} \\ \dots \end{array}$$

т.е. $H(z) = 1 \cdot z^{-0} + 3 \cdot z^{-1} + 3.5 \cdot z^{-2} + 2z^{-3} + \dots$ – содержит бесконечно много отличных от 0 слагаемых. Непосредственно из определения z -преобразования (7.4) следует, что обратное z -преобразование $h_i = Z^{-1}[H(z)]$ будет: $\{h_i\} = \{1, 3, 3.5, 2, \dots\}$ – бесконечный ряд.

Метод разложения в степенной ряд наиболее удобен и прост для автоматизации расчетов на ЭВМ. Он может быть реализован с помощью рекуррентного соотношения:

$$h_n = \begin{cases} b_0 / a_0, n = 0; \\ \frac{1}{a_0} \left[b_n - \sum_{i=1}^n a_i \cdot h_{n-i} \right], n > 0; \end{cases} \quad (8.15)$$

где $h_i = Z^{-1}[H(z)]$, b_0, a_0 – коэффициенты из (8.3). Расчет по формуле (8.15) дает результаты идентичные делению полиномов “столбиком”:

$$h_0 = 1/1 = 1;$$

$$h_1 = \frac{1}{a_0} [b_1 - a_1 \cdot h_0] = \frac{1}{1} [2 - (-1) \cdot 1] = 2 + 1 = 3;$$

$$h_2 = \frac{1}{a_0} [b_2 - (a_1 \cdot h_1 + a_2 \cdot h_0)] = \frac{1}{1} [1 - ((-1) \cdot 3 + 0.5 \cdot 1)] = 1 + 3 - 0.5 = 3.5;$$

$$h_3 = \frac{1}{a_0} [b_3 - (a_1 \cdot h_2 + a_2 \cdot h_1 + a_3 \cdot h_0)] = \frac{1}{1} [0 - ((-1) \cdot 3.5 + 0.5 \cdot 3 + 0 \cdot 1)] = 0 + 3.5 - 1.5 - 0 = 2;$$

и т.д.

Соединение фильтров и их структурные схемы

Эквивалентными называют фильтры, которые дают одинаковые выходы при одинаковых входах.

Для решения практических задач часто фильтры объединяют различными способами. Основные способы соединения фильтров представлены на рис. 8.1.

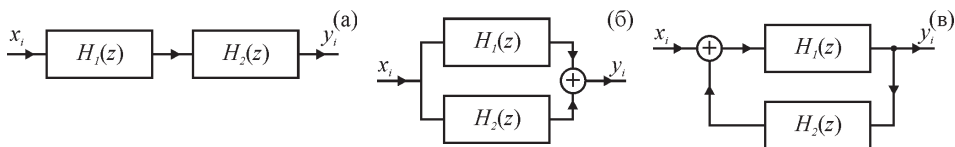


Рис. 8.1 Основные способы соединения фильтров. (а) – Последовательное соединение (каскад фильтров). (б) – Параллельное соединение фильтров. (в) – Соединение с включением в обратную связь.

Можно показать, что передаточная функция каскада последовательно соединенных фильтров равна произведению передаточных функций каждого из фильтров в каскаде, для примера (рис. 8.1а):

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z). \quad (8.16)$$

Передаточная функция системы параллельно соединенных фильтров равна сумме передаточных функций каждого из фильтров системы, для примера (рис. 8.1б):

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z). \quad (8.17)$$

Для фильтров, включенных с обратной связью (рис. 8.1в) справедливо:

$$H(z) = H_1(z) [1 \pm H_1(z) \cdot H_2(z)], \quad (8.18)$$

где знак выбирается соответствующим образом для положительной и отрицательной обратной связи.

На практике могут использоваться и достаточно сложные комбинации перечисленных способов соединения. Например, для решения задач распознавания образов используют сети специальным образом соединенных ЦФ.

БИХ-фильтры низких порядков обычно реализуют в *прямой форме* (8.3), часто, передаточную функцию БИХ-фильтра пытаются представить в виде, соответствующему последовательному каскаду (рис. 8.1а), например, в виде (8.16). Получающаяся система эквивалентна исходной, но ее реализация часто оказывается вычислительно существенно проще. Так, передаточную функцию БИХ-фильтра часто представляют в виде произведения N передаточных функций одинаковых фильтров, обычно, второго порядка. При этом реализация такой системы сводится к программированию одного ЦФ 2 порядка в цикле, итерируемом N раз.

КИХ-фильтры, обычно реализуются непосредственно в виде (8.12). Эту форму называют *трансверсальным фильтром* или *фильтром с многоотводной линией задержки*. В некоторых частных случаях КИХ-фильтр удается представить в рекурсивном виде, тогда его могут представлять в виде последовательного каскада (рис. 8.1а).

Другие формы реализации фильтров на практике используются реже.

Критерий устойчивости

Фильтр называется *устойчивым*, если для выхода $\{y_i\}$ фильтра с входом $\{x_i\}$, где $|x_i| < \infty$ для $\forall i \in Z$ справедливо: $|y_i| < \infty$ для $\forall i \in Z$. Т.е. устойчивый фильтр дает конечный отклик на любое конечное воздействие.

На практике ошибки вызванные, в частности, спецификой вычислений на ЭВМ (конечная точность коэффициентов и данных, округление, переполнение переменных и др.) могут привести к неустойчивости рекурсивного фильтра, поэтому, одним из этапов его разработки является проверка устойчивости. Существуют также специальные приемы, позволяющие улучшить устойчивость фильтра еще на этапе расчета коэффициентов.

Следуя из определения можно показать, что необходимым и достаточным условием устойчивости фильтра с импульсной характеристикой $\{h_i\}$ является:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |h_i| < \infty. \quad (8.19)$$

Определение устойчивости в виде (8.19) затруднительно для практического использования. Обычно используется следствие из (8.19): линейная дискретная система устойчива тогда и только тогда, когда все полюса ее передаточной функции $H(z)$ (т.е. значения z при которых $H(z) = \infty$) лежат внутри единичного круга на z -плоскости (рис. 7.3).

Частотные характеристики

Пусть $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ – последовательности на входе и выходе линейной дискретной системы (фильтра), а $X(e^{j\omega})$ и $Y(e^{j\omega})$ их Фурье-образы. Тогда **частотной характеристикой (ЧХ, frequency response)** системы называют:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}. \quad (8.20)$$

Из свойства (7.13) видна связь передаточной функции $H(e^{j\omega})$ с частотной характеристикой $H(z)$ системы:

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}. \quad (8.21)$$

Тогда из (8.11) видна связь импульсной характеристики системы $\{h_i\}$ с ее частотной характеристикой $H(e^{j\omega})$ – передаточная характеристика системы может быть получена в результате Фурье-преобразования ее ИХ:

$$H(e^{j\omega}) = F[h_i]. \quad (8.22)$$

Частотная характеристика является, в общем случае, комплексной функцией частоты: $H(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jI(\omega)$.

$$A(\omega) = |H(e^{j\omega})| - \quad (8.23)$$

модуль ЧХ – называют **амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ, amplitude response)**,

$$\varphi(\omega) = \arg H(e^{j\omega}) - \quad (8.24)$$

ее аргумент – называют **фазо-частотной характеристикой (ФЧХ, phase response)**, вводится также характеристика:

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}, \quad (8.25)$$

называемая **групповой задержкой (ГЗ, групповое время замедления, ГВЗ, group delay)**.

Нормировка частоты

Для характеристики колебаний измеряемых физических величин во времени традиционно принято частоту f измерять в Герцах, $[1 \text{ Гц}] = [1 \text{ с}^{-1}]$. Когда говорят о частоте вращения, часто используют круговую частоту $\omega = 2\pi f$ (с^{-1}). При изучении процессов, периодических в пространстве (например, при обработке изображений) могут использовать такие единицы измерения, как $[1 \text{ м}^{-1}]$.

Для упрощения математических расчетов и абстрагирования от единиц измерения специфических для каждой конкретной задачи используют нормировку к безразмерной частоте. Наиболее часто используется нормировка, которая подразумевает, что частота дискретизации равна 1 безразмерной частоты, таким образом, при рассмотрении сигналов в частотной области, спектры строятся в диапазоне от 0 до частоты Найквиста – 0.5. Вторая распространенная нормировка подразумевает, что частота дискретизации равна 2π единиц безразмерной частоты, поэтому, при такой нормировке, в частотной области сигналы отображают в $[0, \pi]$ единиц безразмерной частоты. При использовании нормировок к безразмерной частоте единицы измерения, обычно, не указываются.

Пересчет из безразмерных единиц частоты в размерные единицы осуществляется элементарно. Например, при первом способе нормировки (в предположении единичной частоты дискретизации) для описания частотных свойств колебательного процесса достаточно умножить безразмерную частоту на частоту дискретизации сигнала в (Гц).

Лекция 9. Методы синтеза цифровых фильтров

Этапы разработки ЦФ. КИХ-фильтры с линейной фазовой характеристикой. Расчет КИХ-фильтра методом взвешивания. Алгоритм реализации метода взвешивания. Пример расчета фильтра с помощью метода взвешивания. Расчет БИХ-фильтра методом размещения нулей и полюсов. Пример расчета режекторного БИХ-фильтра.

Этапы разработки ЦФ

Разработка цифровых фильтров обычно включает несколько основных этапов (рис. 9.1).



Рис. 9.1 Основные этапы разработки ЦФ.

Первым шагом является спецификация параметров и определение требований, накладываемых на разрабатываемую систему, на основании которых, в частности, делается выбор между системами с КИХ и с БИХ. Например, определяется тип АЧХ (ФНЧ, ФВЧ и пр.), задаются частоты среза, требования на крутизну переходной характеристики, уровень затухания в полосе подавления, уровень пульсаций и пр. Выбирается тип фильтра: например, если задача требует линейности ФЧХ, далее используются методы, предназначенные для расчета КИХ-фильтров, если основным требованием является быстродействие системы, то выбор может быть сделан в пользу БИХ-систем.

На следующем шаге, используя методы, ориентированные на разработку фильтров выбранного типа, рассчитывают коэффициенты фильтра.

Далее выбирают способ реализации (прямая форма или рекурсивное представление), определяются со структурой разрабатываемой системы (последовательный каскад, параллельное соединение и т.п.).

С помощью моделирования на ПК, изучают влияние на разрабатываемую систему эффектов, обусловленных конечной разрядностью. Проверяют устойчивость фильтра, точность с которой была решена задача, определенная в разделе спецификации.

Наконец, фильтр реализуют аппаратно и/или программно, адаптируют его для наиболее эффективной реализации на имеющемся аппаратном обеспечении и тестируют созданную систему, изучая ее отклик на пробные сигналы.

В общем случае в процессе разработки и создания системы может возникнуть необходимость итерационного возврата на предыдущие этапы разработки.

КИХ-фильтры с линейной фазовой характеристикой

Результат воздействия на сигнал фильтра с нелинейной ФЧХ можно сравнить с воздействием, которому подвергается волновой пакет (например, световой луч) при распространении в среде, обладающей дисперсией. Волновые составляющие распространяются в среде с разной скоростью, что приводит к “расплыванию” пакета. Аналогично, различные частотные составляющие сигнала (гармоники) получают при прохождении фильтра, имеющего нелинейную ФЧХ, приращения фаз непропорциональные их частоте, что приводит к искажению сигнала. Особенно нежелательны такие искажения для биомедицинских приложений, задач обработки звука, изображения и др.

Например, музыкальный аккорд фортепиано, состоящий из трех нот, (одновременное нажатие 3 клавиш) представляет собой сигнал, содержащий, в идеале, из 3 гармонических составляющих с разными частотами (музыкальная нота представляет собой колебания струны фортепиано со строго определенной частотой). В случае если цифровая запись звучания такого аккорда была обработана с помощью фильтра с нелинейной ФЧХ, возможен паразитный эффект, воспринимаемый на слух как неодновременное нажатие клавиш фортепиано.

Строго линейная ФЧХ может быть получена только при использовании КИХ-фильтра, принадлежащего одному из 4 типов, приведенных в таблице 9.1 (N -число коэффициентов фильтра, т.е. длина импульсной характеристики h_i).

Тип	Требования к импульсной характеристике	Частотная характеристика $H(\omega)$
1.	Симметричная ИХ: $h_i = h_{N-i-1}$, N -нечетное	$e^{-j\omega(N-1)/2} \sum_{k=0}^{(N-1)/2} a_k \cos(\omega k)$
2.	Симметричная ИХ: $h_i = h_{N-i-1}$, N -четное	$2e^{-j\omega(N-1)/2} \sum_{k=0}^{N/2} h_{N/2-k} \cos(\omega(k - \frac{1}{2}))$
3.	Антисимметричная ИХ: $h_i = -h_{N-i-1}$, N -нечетное	$e^{-j[\omega(N-1)/2 - \pi/2]} \sum_{k=0}^{(N-1)/2} a_k \sin(\omega k)$
4.	Антисимметричная ИХ: $h_i = -h_{N-i-1}$, N -четное	$e^{-j[\omega(N-1)/2 - \pi/2]} \sum_{k=0}^{N/2} a_k \sin(\omega(k - \frac{1}{2}))$

Таблица 9.1. КИХ-фильтры с линейной фазовой характеристикой.

В таблице 9.1:

$$a_k = \begin{cases} h_{(N-1)/2}, & k = 0; \\ 2h_{(N-1)/2-k}, & k > 0. \end{cases} \quad (9.1)$$

Каждый из 4 перечисленных в таблице типов фильтров обладает специфическими свойствами, ограничивающими его область применения:

- фильтры типа 1 наиболее универсальны,
- фильтры типа 2 не используют в качестве ФВЧ,
- фильтры типа 3 не используют ни в качестве ФВЧ, ни в качестве ФНЧ, используют для осуществления преобразования Гильберта,
- фильтры типа 4 не используют в качестве ФНЧ, используют для осуществления преобразования Гильберта.

Расчет КИХ-фильтра методом взвешивания

Для расчета КИХ-фильтров обычно используют один из 3 методов: *метод взвешивания (метод вырезания)*, *метод частотной выборки* и *оптимальный метод*. Метод взвешивания является наиболее простым и понятным, метод частотной выборки позволяет получать фильтры с АЧХ сложной формы и допускает синтез КИХ-фильтров в рекурсивной форме. Оптимальный метод это итерационный подход, он наиболее сложен для понимания и реализации, но позволяет синтезировать наиболее эффективные фильтры.

Основная идея, лежащая в основе любого из 3 перечисленных методов расчета КИХ-фильтров заключается в получении импульсной характеристики (т.е. набора коэффициентов) фильтра путем осуществления обратного Фурье-преобразования предварительно заданной требуемой частотной характеристики.

Предположим, что мы хотим синтезировать КИХ-фильтр низких частот, используя метод взвешивания. Будем использовать нормировку частот, предполагающую, что частота дискретизации сигнала $\omega_{samp} = 2\pi$. Частота среза фильтра ω_1 . Предположим, что мы хотим синтезировать фильтр аппроксимирующий идеальную прямоугольную АЧХ, достигающую 1 в полосе пропускания и равной 0 в полосе подавления с бесконечно узкой переходной полосой. Для удобства интегрирования симметрично дополним АЧХ в области отрицательных частот (рис. 9.2).

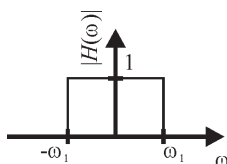


Рис. 9.2 Идеальная прямоугольная характеристика ФНЧ с частотой среза ω_1 .

В силу свойства (8.22) ИХ фильтра $\{\tilde{h}_i\}$ может быть получена из идеальной частотной характеристики $\tilde{H}(\omega)$ путем осуществления обратного Фурье-преобразования $\tilde{H}(\omega)$:

$$\tilde{h}_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{H}(\omega) e^{j\omega i} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} 1 \cdot e^{j\omega i} d\omega = 2f_1 \frac{\sin \omega_1 i}{\omega_1 i}, \quad (9.2)$$

где $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$ – линейная частота среза и $\tilde{h}_0 = 2f_1$, согласно правилу Лопиталья. Знак “~” будем использовать для различения идеальных и реальных частотной и импульсной характеристик, что важно для дальнейшего изложения.

Аналогично, могут быть выведены формулы, описывающие ИХ ФВЧ, ПФ и РФ. Они сведены в таблице 9.2.

Импульсная характеристика (9.2) ИХ является симметричной относительно $i = 0$:

$$\tilde{h}_i = \tilde{h}_{-i}. \quad (9.3)$$

ИХ представляет собой, осциллирующую, затухающую с ростом i функцию. Очевидно, что $\{\tilde{h}_i\}$ имеет БЕСКОНЕЧНУЮ длину, т.к. i может меняться от 0 до $\pm\infty$.

Для получения конечной импульсной характеристики, ИХ, описывающую идеальную прямоугольную АЧХ усекают, положив, ее равной 0 для $i \notin [-M, M]$, $M < \infty$:

$$h_i = \begin{cases} \tilde{h}_i, & i \in [-M, M]; \\ 0, & i \notin [-M, M]. \end{cases} \quad (9.4)$$

Частотная характеристика:

$$H(\omega) = F[h_i], \quad (9.5)$$

соответствующая ИХ $\{h_i\}$ КИХ-фильтра будет описывать $\tilde{H}(\omega)$ лишь приближенно. Типично появление в частотной области пульсаций и выбросов вблизи частоты среза – т.н. *эффектов Гиббса*. $H(\omega)$ будет тем ближе $\tilde{H}(\omega)$, чем больше коэффициентов останется после усечения $\{\tilde{h}_i\}$.

Тип фильтра	$h_i, i \neq 0$	h_0
ФНЧ	$2f_1 \frac{\sin \omega_1 i}{\omega_1 i}$	$2f_1$
ФВЧ	$-2f_1 \frac{\sin \omega_1 i}{\omega_1 i}$	$1 - 2f_1$
ПФ	$2f_2 \frac{\sin \omega_2 i}{\omega_2 i} - 2f_1 \frac{\sin \omega_1 i}{\omega_1 i}$	$2(f_2 - f_1)$
РФ	$2f_1 \frac{\sin \omega_1 i}{\omega_1 i} - 2f_2 \frac{\sin \omega_2 i}{\omega_2 i}$	$1 - 2(f_2 - f_1)$

Таблица 9.2. Импульсные характеристики фильтров.

Усечение ИХ аналогично ее умножению на прямоугольную весовую функцию:

$$W_i = \begin{cases} 1, & i \in [-M, M]; \\ 0, & i \notin [-M, M]. \end{cases} \quad (9.5)$$

Можно показать, что использование других оконных функций, например, окон Бартлетта (4.3), Хемминга (4.5), Ханна (4.6), Наттола (4.7) позволяет ослабить паразитные эффекты Гиббса, но приводит к увеличению ширины переходной полосы.

В качестве примера в таблице 9.3 сопоставляются некоторые характеристики прямоугольного окна и достаточно широко используемой весовой функции Хемминга.

Весовая функция	Нормированная ширина переходной полосы, Гц	Уровень пульсаций в полосе пропускания, Дб	Затухание в полосе подавления, Дб
Прямоугольная	$0.9 / N$	0.742	21
Хемминга	$3.3 / N$	0.019	53

Таблица 9.3. Сравнение характеристик весовых функций (N -количество коэффициентов фильтра).

Алгоритм реализации метода взвешивания

Таким образом, метод взвешивания реализуется с помощью следующего алгоритма:

1. из таблицы 9.2 выбрать формулу для расчета ИХ \tilde{h}_i фильтра нужного типа;

2. используя заданные по постановке задачи требования на затухание в полосе подавления фильтра и допустимый уровень пульсаций в полосе пропускания, с помощью справочных таблиц (например, таб. 9.3), выбирается подходящая весовая функция W_i ;
3. учитывая заданные по постановке задачи требования к ширине полосы перехода с помощью данных, приведенных в справочных таблицах (например, таб. 9.3) для выбранной весовой функции W_i , вычисляется число N коэффициентов фильтра, необходимое для обеспечения требуемой ширины переходной полосы;
4. для $i = 0, N/2$ рассчитываем ИХ фильтра: $h_i = \tilde{h}_i \cdot W_i$;
5. вторую половину коэффициентов находим, используя свойство симметрии ИХ (9.3): $h_{-i} = h_i$;
6. полученный ряд $\{h_i\}$ условно сдвигается во времени таким образом, чтобы исключить отрицательные индексы (рис. 9.3б);
7. для фильтрации входной реализации $\{x_i\}$ используется свертка: $y_i = \sum_{k=0}^N h_i \cdot x_{i-k}$.

Пример расчета фильтра с помощью метода взвешивания

В качестве примера рассчитаем фильтр, удовлетворяющий следующей спецификации:

1. ФНЧ с линейной АЧХ;
2. частота дискретизации входного сигнала $F_{\text{samp}} = 8$ кГц;
3. частота среза $f_{\text{cutoff}} = 1.5$ кГц;
4. затухание в полосе подавления не менее 40 Дб;
5. ширина полосы перехода не более $\Delta f = 0.5$ кГц.

Решение:

1. Пункт 1 спецификации определяет выбор типа фильтра – это КИХ-фильтр с ИХ типа 1 или 2 (см. таб. 9.1).
2. Пункт 4 определяет выбор оконной функции, из таблицы 9.3 видно, что прямоугольное окно не удовлетворяет спецификации, поэтому, остановим выбор на окне Хемминга (4.5): $W_i = 0.46 \cos(2\pi i / N) + 0.54$.
3. Определим количество коэффициентов фильтра. Пункт 5 задает требования на ширину переходной полосы. Нормированную ширину полосы перехода для выбранной весовой функции Хемминга определим из таблицы 9.3: $\Delta f_n = \frac{3.3}{N}$, тогда $N = \frac{3.3}{\Delta f_n}$, где $\Delta f_n = \frac{\Delta f}{F_{\text{samp}}}$ – нормированная на частоту дискретизации ширина переходной полосы, тогда: $N = \frac{3.3 \cdot F_{\text{samp}}}{\Delta f} = \frac{3.3 \cdot 8}{0.5} = 52.8$. Т.к. число коэффициентов N – целое число, то, округляя, получим: $N=53$.

Т.е. рассчитываемый фильтр должен иметь ИХ типа 1 (таб. 9.1) – нечетная с положительной симметрией.

4. АЧХ фильтра при использовании весовой функции смазывается, и частота среза фильтра будет отличаться от f_{cutoff} . Чтобы учесть этот эффект вместо f_{cutoff} для расчетов используют $f_c = f_{\text{cutoff}} + \Delta f / 2 = 1.5 + 0.5 / 2 = 1.75$ кГц – центр переходной полосы.

5. Для расчета коэффициентов \tilde{h}_i по формулам из таблицы 9.2 перейдем к безразмерной

частоте: $\hat{f}_c = \frac{\hat{f}_c}{F_{\text{смп}}} = \frac{1.75}{8} \approx 0.21875$. Соответствующая круговая частота:

$$\hat{\omega}_c = 2\pi\hat{f}_c \approx 2 \cdot 3.14159 \cdot 0.21875 \approx 1.37445.$$

6. Рассчитаем h_0 , используя формулу из таблицы 9.2 и (4.5):

$$\tilde{h}_0 = 2\hat{f}_c = 2 \cdot 0.21875 = 0.43750, \quad W_0 = 0.46\cos(2\pi 0/53) + 0.54 = 0.46 \cdot 1 + 0.54 = 1.0, \quad \text{тогда}$$

$$h_0 = \tilde{h}_0 \cdot W_0 = 0.43750 \cdot 1.0 = 0.43750.$$

При $i = 1$:

$$\tilde{h}_1 = 2\hat{f}_c \frac{\sin(\hat{\omega}_c \cdot 1)}{\hat{\omega}_c \cdot 1} = 2 \cdot 0.21875 \frac{\sin(1.37445)}{1.37445} = 0.43750 \frac{0.98079}{1.37445} \approx 0.31219,$$

$$W_1 = 0.46\cos(2\pi \cdot 1/53) + 0.54 = 0.46 \cdot 0.99298 + 0.54 \approx 0.99677,$$

$$h_1 = 0.31219 \cdot 0.99677 \approx 0.31118.$$

При $i = 2$:

$$\tilde{h}_2 = 2\hat{f}_c \frac{\sin(\hat{\omega}_c \cdot 2)}{\hat{\omega}_c \cdot 2} = 0.43750 \frac{\sin(1.37445 \cdot 2)}{1.37445 \cdot 2} = 0.43750 \frac{0.38268}{2.74890} = 0.06090,$$

$$W_2 = 0.46\cos(2\pi 2/53) + 0.54 = 0.46 \cdot 0.97202 + 0.54 \approx 0.98713,$$

$$h_2 = 0.06090 \cdot 0.98713 \approx 0.06012.$$

...

При $i = 26$:

$$\tilde{h}_{26} = 2\hat{f}_c \frac{\sin(\hat{\omega}_c \cdot 26)}{\hat{\omega}_c \cdot 26} = 0.43750 \frac{\sin(1.37445 \cdot 26)}{1.37445 \cdot 26} = 0.43750 \frac{-0.92391}{35.73570} \approx -0.01131,$$

$$W_{26} = 0.46\cos(2\pi 26/53) + 0.54 = 0.46 \cdot (-0.99824) + 0.54 \approx 0.08080,$$

$$h_{26} = 0.06090 \cdot 0.98713 \approx 0.00091.$$

7. Благодаря свойству симметрии ИХ (9.3), значения h_i , при $i = -1, -26$ можно не вычислять, а получить, как $h_{-i} = h_i$.

8. Для дальнейшего использования нумерацию коэффициентов КИХ-фильтра нужно сдвинуть таким образом, чтобы избавиться от отрицательных индексов. В нашем случае, для этого нужно увеличить все индексы на 26.

Все коэффициенты рассчитанного фильтра приведены в таблице 9.4. На рисунке 9.4 в виде графиков представлены весовая функция Хемминга W_i (рис. 9.3а) и импульсная характеристика h_i рассчитанного фильтра (рис. 9.3б).

ФЧХ и АЧХ построенного фильтра представлены на рис. 9.4а и рис. 9.4б, соответственно. Для сравнения, на рис. 9.4в приведена АЧХ фильтра с ИХ \tilde{h}_i , при построении которого использовалась прямоугольная весовая функция. Сравнивая рис. 9.4б и рис. 9.4в видно, что использование весовой функции привело к увеличению ширины переходной полосы, но обеспечило лучшее затухание в полосе подавления.

При работе с прямоугольными фильтрами введение понятия частоты среза не вызывает затруднений. При расчете фильтров под частотой среза часто понимают граничную частоту, за которой идеализированная АЧХ начинает убывать. На практике полоса перехода обладает конечной шириной и АЧХ может иметь сложную форму, поэтому, частоту среза фильтра условились задавать как частоту, на которой величина АЧХ соответствует ослаблению сигнала по уровню -3 Дб (примерно, в 2 раза по амплитуде).

Расчет БИХ-фильтра методом размещения нулей и полюсов

Передаточная функция рекурсивного БИХ-фильтра обычно задается в виде (8.3):

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{N-1} z^{-(N-1)}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{M-1} z^{-(M-1)}}. \quad (9.6)$$

Показано, что (9.6) можно представить в виде:

$$H(z) = K \frac{(z - z_0) \cdot (z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_{N-1})}{(z - p_0) \cdot (z - p_1) \cdot \dots \cdot (z - p_{M-1})}, \quad (9.7)$$

где z_n – нули $H(z)$ ($H(z=z_n)=0$), p_m – полюса $H(z)$ ($H(z=p_m)=\infty$), . Расчет БИХ-фильтра, в первую очередь, сводится к поиску $H(z)$ и записи по ней разностного уравнения фильтра.

Индекс, i	Сдвинутый индекс, i	\tilde{h}_i	W_i	h_i	Сдвинутый индекс, i	Индекс, i
-26	0	-0.01131113	0.08080788	-0.00091403	52	26
-25	1	0.00248296	0.08725393	0.00021665	51	25
-24	2	0.01326288	0.10005555	0.00132702	50	24
-23	3	0.00270096	0.11903302	0.00032150	49	23
-22	4	-0.01336685	0.14391994	-0.00192376	48	22
-21	5	-0.00842195	0.17436696	-0.00146851	47	21
-20	6	0.01125320	0.20994666	0.00236257	46	20
-19	7	0.01393027	0.25015959	0.00348479	45	19
-18	8	-0.00676637	0.29444125	-0.00199230	44	18
-17	9	-0.01836449	0.34217001	-0.00628378	43	17
-16	10	-0.00000102	0.39267587	-0.00000040	42	16
-15	11	0.02081266	0.44524984	0.00926683	41	15
-14	12	0.00870178	0.49915389	0.00434353	40	14
-13	13	-0.02035823	0.55363133	-0.01127095	39	13
-12	14	-0.01875727	0.60791742	-0.01140287	38	12
-11	15	0.01607579	0.66125010	0.01063012	37	11
-10	16	0.02940832	0.71288069	0.02096462	36	10
-9	17	-0.00689889	0.76208441	-0.00525754	35	9
-8	18	-0.03978864	0.80817056	-0.03215601	34	8
-7	19	-0.00887229	0.85049218	-0.00754582	33	7
-6	20	0.04901283	0.88845517	0.04354570	32	6
-5	21	0.03536947	0.92152662	0.03259391	31	5
-4	22	-0.05626891	0.94924226	-0.05341283	30	4
-3	23	-0.08822203	0.97121304	-0.08568238	29	3
-2	24	0.06090487	0.98713054	0.06012106	28	2
-1	25	0.31219312	0.99677130	0.31118514	27	1
0	26	0.43750000	1.00000000	0.43750000	26	0

Таблица 9.4. Коэффициенты КИХ-фильтра, удовлетворяющего спецификации, заданной для приведенного примера.

Известно несколько методов расчета БИХ-фильтров, например, методы размещения полюсов и нулей, билинейного z -преобразования, инвариантного преобразования ИХ, согласованного z -преобразования.

Метод размещения полюсов и нулей на комплексной плоскости является одним из наиболее простых и наглядных методов, позволяющих осуществлять расчет простых рекурсивных фильтров без применения ЭВМ. Он основан на свойствах передаточной

функции: полюс на z -плоскости дает максимум АЧХ тем больший, чем ближе полюс к единичной окружности, а ноль $H(z)$ дает минимум АЧХ на соответствующей частоте тем более глубокий, чем ближе ноль к единичной окружности. Следовательно, размещение нулей и полюсов на z -плоскости позволяет строить несложные частотно-избирательные фильтры.

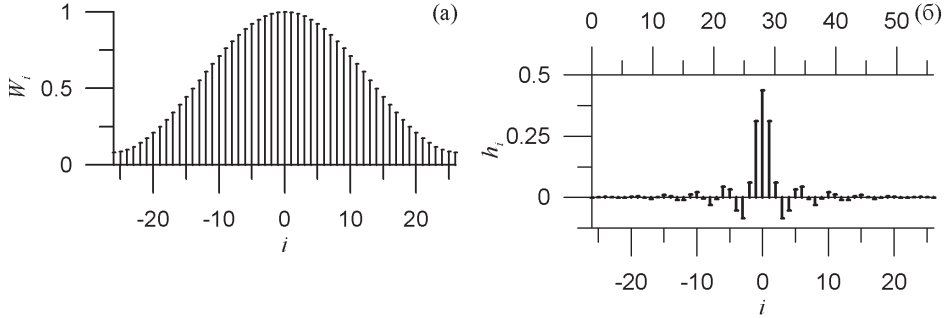


Рис. 9.3 (а) – Окно Хэмминга W_i . (б) – Импульсная характеристика КИХ-фильтра h_i при исходной нумерации коэффициентов фильтра и сдвинутой индексации.

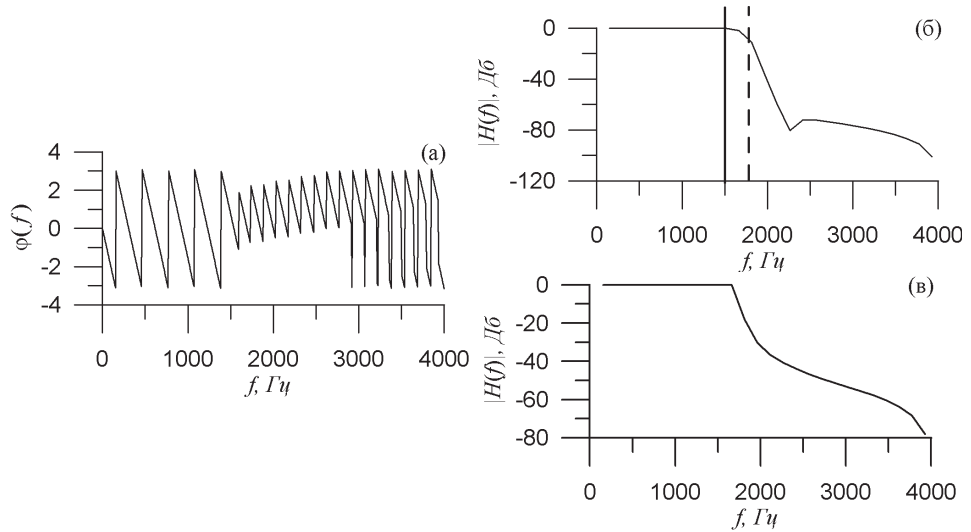


Рис. 9.4 (а) – ФЧХ фильтра. (б) – АЧХ фильтра в логарифмическом масштабе. Сплошной вертикальной линией отмечена $f_{сutoff}$ – частота среза заданная в спецификации. Пунктирной вертикальной линией отмечен f_c – центр переходной полосы. (в) – Для сравнения представлена в логарифмическом масштабе АЧХ фильтра, построенного с использованием прямоугольной весовой функции (коэффициенты \tilde{h}_i приведены в таб. 9.4).

При использовании метода размещения нулей и полюсов нужно учитывать несколько важных моментов:

1. чтобы коэффициенты фильтра были действительными необходимо, чтобы либо полюса и нули были действительными, либо встречались комплексно-сопряженными парами;
2. для обеспечения устойчивости фильтра полюса размещают на некотором удалении от единичной окружности, выбирая длину радиус-вектора к полюсу $r \approx 0.9$, нули обычно размещают на единичной окружности;
3. ширина полосы перехода связана с длиной радиус-вектора, оценка ширины полосы перехода для $r > 0.9$ обычно дается как:

$$r \approx 1 - \pi \frac{\Delta f}{F_{\text{samp}}}. \quad (9.8)$$

Пример расчета режекторного БИХ-фильтра

В качестве примера рассчитаем фильтр, удовлетворяющий следующей спецификации:

1. фильтр для режекции сетевой наводки;
2. частота дискретизации входного сигнала $F_{\text{samp}} = 0.5$ кГц;
3. узкополосная режекция вблизи $f_{\text{cutoff}} = 50$ Гц, частоты среза по уровню 3 Дб: $f_1 = 45$ Гц, $f_2 = 55$ Гц;

Решение:

1. Для режекции 50 Гц составляющей разместим на единичной окружности z -плоскости ноль z_0 в точке, соответствующей 50 Гц, т.е. угол между радиус-вектором z_0 (длина которого $r_{z_0} = 1$) и положительной осью абсцисс составит:

$$\varphi_{z_0} = 2\pi \frac{f_{\text{cutoff}}}{F_{\text{samp}}} = 2\pi \frac{50}{500} = \frac{\pi}{5}.$$

2. Добавим комплексно-сопряженный ноль $z_1 = z_0^*$: $r_{z_1} = 1$, $\varphi_{z_1} = -\varphi_{z_0} = -\frac{\pi}{5}$.
3. Для обеспечения узкой полосы пропускания размещаем полюса: p_0 и комплексно сопряженный ему $p_1 = p_0^*$, таким образом, чтобы $\varphi_{p_0} = \varphi_{z_0} = \frac{\pi}{5}$ и $\varphi_{p_1} = \varphi_{z_1} = -\frac{\pi}{5}$, соответственно (рис. 9.5а).
4. Из условия на ширину полосы подавления по уровню 3 Дб: $\Delta f = f_2 - f_1 = 55 - 45 = 10$ Гц, используя (9.8), оценим длину радиус-векторов:

$$r_{p_0} = 1 - \pi \frac{10}{500} \approx 0.93717 \text{ и, т.к. } |p_1| = |p_0^*|, r_{p_1} = r_{p_0} \approx 0.93717.$$

5. Таким образом:

$$z_0 = r_{z_0} e^{j\varphi_{z_0}} = r_{z_0} (\cos \varphi_{z_0} + j \sin \varphi_{z_0}) = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{5} + j \sin \frac{\pi}{5} \right) \approx 0.80902 + j0.58779,$$

$$z_1 = z_0^* \approx 0.80902 - j0.58779, \text{ аналогично,}$$

$$p_0 = r_{p_0} (\cos \varphi_{p_0} + j \sin \varphi_{p_0}) = 0.93717 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{5} + j \sin \frac{\pi}{5} \right) \approx 0.75819 + j0.55086$$

$$p_1 = p_0^* \approx 0.75819 - j0.55086$$

6. Тогда, используя (9.7):

$$H(z) = \frac{(z - z_0) \cdot (z - z_1)}{(z - p_0) \cdot (z - p_1)} = \frac{(z - 0.80902 - j0.58779) \cdot (z - 0.80902 + j0.58779)}{(z - 0.75819 - j0.55086) \cdot (z - 0.75819 + j0.55086)},$$

раскрыв скобки и приведя подобные члены: $H(z) = \frac{z^2 - 1.61804z + 1.0}{z^2 - 1.51638z + 0.87830}$, поделив числитель и знаменатель на старшую степень z^2 :

$$H(z) = \frac{1 - 1.61804z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1.51638z^{-1} + 0.87830z^{-2}}.$$

7. Зная передаточную функцию $H(z)$ и учитывая (9.6) можно записать разностное уравнение рассчитанного БИХ-фильтра:

$$y_i = x_i - 1.61804x_{i-1} + x_{i-2} + 1.51638y_{i-1} - 0.87830y_{i-2}. \quad (9.9)$$

На рис. 9.5 б,в,г представлены, соответственно, АЧХ, ФЧХ и ГВЗ рассчитанного режекторного БИХ-фильтра.

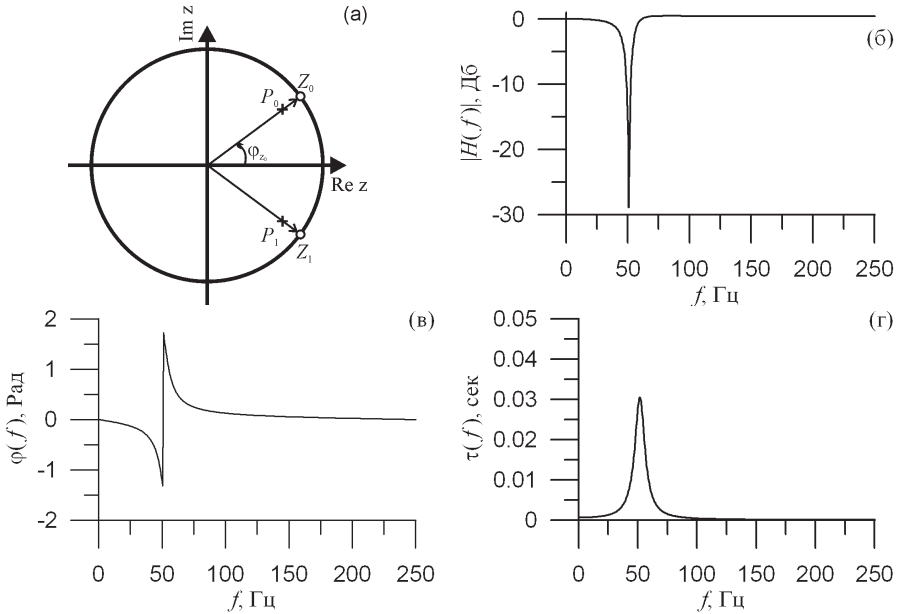


Рис. 9.5 (а) – z -плоскость для БИХ-фильтра с заданной спецификацией. (б) – АЧХ этого фильтра в логарифмическом масштабе. (в) – ФЧХ фильтра. Видно, что, в отличие от КИХ-фильтра (рис. 9.4а) ФЧХ БИХ-системы нелинейна, причем нелинейность сильнее проявляется вблизи частоты среза. (г) – Т.к. ФЧХ нелинейная функция частоты, то ГВЗ также нелинейна.

Приложение: тексты заданий для практических занятий по курсу

Предполагается, что на каждое практическое занятие отводится по 4 академических часа занятий в компьютерном классе. Студенты в ходе индивидуальной работы должны выполнить задания, составив для решения поставленных учебных задач компьютерные программы. Некоторые практические задания сопровождаются необязательными для выполнения студентами дополнительными задачами. Обычно, они немного усложнены и требуют творческого подхода.

При создании компьютерных программ рекомендуется использовать вещественные переменные двойной точности везде, где логика программирования или постановка задачи не требует иного. Массивы передаются в подпрограммы по ссылке или описываются, как глобальные. Хотя при профессиональной разработке компьютерных программ использование глобальных переменных и массивов не рекомендуется, для решения представленных ниже учебных задач это допустимо.

Учебные файлы данных, указанные в заданиях, могут быть загружены с сервера Саратовского госуниверситета со страницы кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии: <http://nonlinmod.sgu.ru/doc/mtspdata.rar>.

Практическое занятие 1 (по материалам лекции 1)

1.1 Запрограммировать оценку эмпирического среднего по участку временного ряда методом суммирования с накоплением, оформив алгоритм в виде функции.

На входе подпрограммы: массив элементов вещественного типа, индекс первого элемента массива и длина анализируемого участка в отсчетах.

На выходе подпрограммы: оценка эмпирического среднего.

Тест подпрограммы производить, загрузив данные из файлов “Практическое занятие 1/mean1.txt” и “Практическое занятие 1/mean2.txt”.

(Ответ: $\hat{M}_x = 2.0$, $\hat{M}_x = 1.02$, соответственно).

1.2 Запрограммировать оценку эмпирического среднего по участку временного ряда методом расчета частичных сумм, оформив алгоритм в виде функции.

Вход и выход подпрограммы: аналогично п. 1.1.

Тест подпрограммы производить, загрузив данные из файла “Практическое занятие 1/mean2.txt”.

(Ответ: $\hat{M}_x = 1.02$).

1.3 Запрограммировать оценку дисперсии по участку реализации, оформив алгоритм в виде функции.

Вход подпрограммы аналогично п. 1.1.

На выходе подпрограммы: оценка дисперсии.

При реализации алгоритма можно использовать функцию оценки эмпирического среднего, созданную при выполнении п. 1.1.

Тест подпрограммы производить, загрузив данные из файла “Практическое занятие 1/mean1.txt”.

(Ответ: $\hat{\sigma}_x^2 = 13.5$)

Дополнительные задачи

1.4. Сгенерировать реализацию $\{x_i\}_{i=0}^{N-1}$, $N=10000$ отсчетов нормально распределенного случайного процесса с единичным средним и дисперсией. Изменяя длину обрабатываемого участка этой реализации: $L = 100k + 100$, $k = 0, 99$, $k \in Z$ (т.е. при $k=0$ обрабатывается участок $\{x_i\}_{i=0}^{L-1=99}$, при $k=1 - \{x_i\}_{i=0}^{199}$ и т.д.) исследовать, как ведут себя оценки по временным рядам среднего $\hat{M}_x(L)$ и дисперсии $\hat{\sigma}_x^2(L)$ в зависимости от длины реализации L . Построить графики зависимости $\hat{M}_x(k)$ и $\hat{\sigma}_x^2(k)$.

Практическое занятие 2 (по материалам лекции 2)

- 2.1. Запрограммировать расчет ККФ. Оформить алгоритм в виде функции
На входе подпрограммы: массивы сигналов X и Y , величина сдвига τ , длина анализируемых участков реализаций N .
На выходе подпрограммы: ККФ.
Используя созданную подпрограмму рассчитать и построить график АКФ временного ряда “Практическое занятие 2\Sin.txt” для $\tau = 0, 1000, \tau \in Z$.
- 2.2. Используя подпрограмму, созданную при выполнении п. 2.1 рассчитать и отобразить графически АКФ реализации белого шума “Практическое занятие 2\White noise.txt” для $\tau = 0, 200, \tau \in Z$.
- 2.3. Используя подпрограмму, созданную при выполнении п. 2.1 рассчитать и отобразить графически АКФ реализации цветного шума “Практическое занятие 2\Red noise.txt” для $\tau = 0, 200, \tau \in Z$.
- 2.4. Рассчитывая АКФ сигнала “Практическое занятие 2\Noise+Sin.txt” с помощью подпрограммы, созданной при выполнении п. 2.1, определить период гармонической составляющей сигнала, скрытой аддитивным шумом.
(**Ответ:** 20 дискретных отсчетов)

Дополнительные задачи

- 2.5. Из-за несоблюдения особенностей технологического процесса внутри объемной стальной детали образовался дефект. Излучатель ультразвукового дефектоскопа генерирует гармонические импульсы с частотой 5 МГц. Тестируемый сигнал отражается от дефекта и регистрируется приемником дефектоскопа. Излученный и принятый сигнал были оцифрованы с частотой дискретизации 100 МГц и сохранены в файлы “Практическое занятие 2\Radар data\US transmitter.txt” и “Практическое занятие 2\Radар data\US receiver.txt” (принятый после отражения от дефекта сигнал значительно затух и зашумлен) соответственно. Необходимо определить, на какой глубине, расположен дефект, полагая, что скорость звука в стали используемой марки 5 км/с.
- 2.6. При использовании современных диагностических показателей состояния сердечнососудистой системы человека важно корректно идентифицировать моменты R-пиков (высокоамплитудных короткие положительные зубцы при регистрации кардиосигнала во II стандартном отведении) электрокардиограммы (ЭКГ). Одним из методов решения этой задачи является сопоставление в скользящем окне участка исследуемого сигнала с участком «эталонной» ЭКГ с помощью расчета ККФ. В задаче требуется осуществить поиск R-пиков временного ряда ЭКГ участком с помощью оценки в скользящем окне ККФ этого ряда и «эталонной» записи одного предварительно выбранного кардиокомплекса здорового человека “Практическое занятие 2\ECG data\ECG_sample_R.txt”. Отобразить графически результаты обработки, построив временной ряд ЭКГ с помеченными вершинами R-пиков и рассчитываемую в скользящем окне величину ККФ.

Практическое занятие 3 (по материалам лекции 3)

- 3.1. Запрограммировать ДПФ, оформив его расчет в виде процедуры.
На входе подпрограммы: массив, содержащий временной ряд, целое N – длина анализируемого участка ряда.
На выходе подпрограммы: массивы коэффициентов a_n и b_n : A_n и B_n соответственно.
- 3.2. Запрограммировать обратное ДПФ, оформив его в виде процедуры.
На входе подпрограммы: глобальные массивы коэффициентов a_n и b_n : A_n и B_n соответственно, целое M – количество гармоник.
На выходе подпрограммы: массив, содержащий временной ряд.

- 3.3. Сгенерировать временной ряд из 5 периодов синусоиды с частотой 10 отсчетов на период. Отобразить реализацию графически. Используя созданную в п. 3.1 подпрограмму, построить и отобразить на графике амплитудный спектр созданной реализации.
- 3.4. Смоделировать временной ряд длительностью 2 секунды суммы синусоидального сигнала с амплитудой 1.2 и частотой 10 Гц и синусоидального сигнала с амплитудой 2 и частотой 20 Гц при частоте дискретизации 100 Гц. Отобразить созданный временной ряд графически. Используя созданную в п. 3.1 подпрограмму, построить и отобразить на графике амплитудный спектр созданной реализации. Значения на оси частот графика амплитудного спектра отображать в герцах.
- 3.5. Используя созданную в п. 3.2 подпрограмму, рассчитать обратное ДПФ по имеющемуся амплитудному спектру созданного в п. 3.4 сигнала. Отобразить на одном графике исходный временной ряд (сумму 2 гармонических составляющих), ряд, полученный в результате обратного ДПФ, разницу между этими рядами.

Практическое занятие 4 (по материалам лекций 3 и 4)

- 4.1. С помощью построения графика периодограммы изучить спектральный состав ряда “Практическое занятие 4\X2000Hz.txt” (Частота дискретизация сигнала 2000 Гц). Проредить ряд, перевыбрав его до частоты 200 Гц (т.е. создать новый ряд, выбрав из исходного каждый 10 отсчет). Изучить периодограмму прореженного сигнала с частотой 200 Гц и сопоставить ее с периодограммой исходного сигнала. Объяснить наблюдающиеся эффекты.
- 4.2. Запрограммировать генерацию временной реализации гармонического сигнала с периодом 30 дискретных отсчетов. Сопоставить периодограммы реализаций такого сигнала длиной $N_1=3000$, $N_2=2999$ и $N_3=2992$. Объяснить наблюдающиеся эффекты.
- 4.3. Запрограммировать, оформив в виде процедуры, оконные преобразования Бартлетта, Хэмминга и прямоугольное окно.
На входе подпрограммы: массив данных, длина массива, целочисленный код, задающий тип используемого окна.
На выходе подпрограммы: массив, содержащий результат умножения исходного временного ряда на заданное окно.
- 4.4. С помощью подпрограммы, созданной при выполнении п. 4.3 построить и сопоставить периодограммы гармонического сигнала, сгенерированного при выполнении п. 4.2 при использовании прямоугольного окна, а также окон Бартлетта и Хэмминга для $N_1=3000$ и $N_3=2992$. Привести соответствующие графики, сделать выводы.

Практическое занятие 5 (по материалам лекций 3-5)

- 5.1. Рассчитать периодограмму реализации из файла “Практическое занятие 5\lfr.txt” ($F_{\text{samp}}=1$ кГц) и построить графики функций спектральной плотности в линейном и логарифмическом масштабах.
- 5.2. Запрограммировать метод оценки спектров Даньелла, оформив алгоритм в виде процедуры.
На входе подпрограммы: массив данных, его длина, ширина окна усреднения в частотной области.
На выходе подпрограммы: массив, содержащий оценку спектра мощности входного временного ряда, сделанную методом Даньелла.
 При реализации метода можно использовать подпрограмму, осуществляющую ДПФ, созданную при выполнении п. 3.1.
- 5.3. С помощью подпрограммы, созданной при выполнении п. 5.2 оценить спектр реализации белого шума из файла “Практическое занятие 5\noise.txt” при различных значениях ширины окна усреднения.

- 5.4. Запрограммировать генерацию временной реализации гармонического сигнала с периодом 30 дискретных отсчетов длиной 3000 отсчетов. Сопоставить оценки спектра мощности этой реализации, сделанные с помощью построения периодограммы и полученные при использовании метода Даньелла.

Дополнительные задачи

- 5.5. Запрограммировать метод оценки спектров Уэлча, оформив алгоритм в виде процедуры.
На входе подпрограммы: массив данных, его длина, ширина окна, используемого при расчете периодограмм, сдвиг окна, используемого при расчете периодограмм, целочисленный код, определяющий тип оконного преобразования.
На выходе подпрограммы: массив, содержащий оценку спектра мощности входного временного ряда, сделанную методом Уэлча.
При реализации метода можно использовать подпрограммы, осуществляющие ДПФ (п. 3.1) и оконное преобразование сигнала (п. 4.3).
- 5.6. Применить метод Уэлча для оценки спектра мощности реализации процесса белого шума “Практическое занятие 5\noise.txt”, частота дискретизации 10 Гц. При выборе параметров метода Уэлча обеспечить спектральное разрешение не хуже 0.1 Гц.
- 5.7. Запрограммировать генерацию временной реализации гармонического сигнала с периодом 30 дискретных отсчетов длиной 3000 отсчетов. Сопоставить оценки спектра мощности этой реализации, сделанные с помощью метода Даньелла и метода Уэлча. Ширину окна для построения периодограммы задать равной 300 отсчетов, перекрытие при сдвиге окон задать равным 50% ширины окна.

Практическое занятие 6 (по материалам лекций 3, 6)

- 6.1. Запрограммировать, оформив в виде функции, расчет свертки y_i последовательности $\{x_i\}$ с импульсной характеристикой $\{h_i\}$.
На входе подпрограммы: массив данных $\{x_i\}$, его длина, массив, содержащий значения $\{h_i\}$, количество элементов в этом массиве, момент времени (номер отсчета i) для которого считается свертка.
На выходе подпрограммы: значение свертки y_i в данный момент времени.
- 6.2. Используя подпрограмму (п. 6.1) рассчитать свертку реализации $\{x_i\}$ из файла “Практическое занятие 6\hi.txt” с импульсной характеристикой $\{h_i\}$ из файла “Практическое занятие 6\hi.txt”. Отобразить на графиках $\{x_i\}$, $\{h_i\}$ и $\{y_i\}$, где $y_i = h_i * x_i$.
- 6.3. Иллюстрация свойства (6.9) свертки. Запрограммировать свертку $\{y_i\}$ временного ряда суммы 3 гармонических функций $\{x_i\}$ из “Практическое занятие 6\i_3sin.txt” и импульсной характеристики частотно-избирательного фильтра $\{h_i\}$ из файла “Практическое занятие 6\hi_BandPass100Hz_1kHz.txt”. Рассчитать и отобразить графически: $|X(f)|$, $|H(f)|$, $|Y(f)|$, $|X(f) \cdot Y(f)|$ где $Y(f)$, $X(f)$ и $H(f)$ – Фурье-образы $\{x_i\}$, $\{h_i\}$ и $\{y_i\}$ ($y_i = h_i * x_i$), соответственно.

Практическое занятие 7 (по материалам лекции 7)

- 7.1. Известна передаточная функция дискретной линейной системы:

$$H(z) = \frac{0.01z^9 + 0.03z^8 + 0.09z^7 + 0.20z^6 + 0.20z^5 + 0.20z^4 + 0.20z^3 + 0.09z^2 + 0.03z^1 + 0.01}{z^9}$$

Бесконечную или конечную импульсную характеристику имеет рассматриваемая система? Записать описывающее систему разностное уравнение.

- 7.2. Известна передаточная функция дискретной линейной системы:

$$H(z) = \frac{0.02z^3 + 0.05z^2 + 0.05z + 0.02}{z^3 - 2.00z^2 + z - 0.30}$$

Бесконечную или конечную импульсную характеристику имеет рассматриваемая система? Записать описывающее систему разностное уравнение.

- 7.3. Известно разностное уравнение, описывающее дискретную линейную систему:

$$y_i = -0.01x_i + 0.02x_{i-1} + 0.05x_{i-2} - 0.10x_{i-3} + 0.04x_{i-4} + \\ + 0.04x_{i-5} - 0.10x_{i-6} + 0.05x_{i-7} + 0.02x_{i-8} - 0.01x_{i-9}$$

Бесконечную или конечную импульсную характеристику имеет рассматриваемая система? Записать передаточную функцию $H(z)$ такой системы.

- 7.4. Известно разностное уравнение, описывающее дискретную линейную систему:

$$y_i = 0.6x_i - x_{i-1} + 0.6x_{i-2} + y_{i-1} - 0.4y_{i-2}$$

Бесконечную или конечную импульсную характеристику имеет рассматриваемая система? Записать передаточную функцию $H(z)$ такой системы.

Практическое занятие 8 (по материалам лекций 3, 8)

- 8.1. Передаточная функция цифрового фильтра имеет вид: $H(z) = \frac{0.2 + 0.4z^{-1} + 0.2z^{-2}}{1 - 0.4z^{-1} + 0.2z^{-2}}$

Рассчитать методом деления в столбик и отобразить графически 1000 значений импульсной характеристики. Рассчитать и изобразить графически АЧХ этого фильтра в линейном масштабе. К какому классу относится линейная система, имеющая такую передаточную характеристику? Какой тип у анализируемого фильтра? Какая частота среза?

(Ответ: БИХ ФНЧ, частота среза по уровню -3 Дб составляет 0.2 частоты дискретизации)

Практическое занятие 9 (по материалам лекций 3-6, 8, 9)

- 9.1. С помощью КИХ ФНЧ, коэффициенты которого хранятся в текстовом файле “Практическое занятие 9\FIR_LPF_Fco=1.5kHz_Fsamp=8kHz.txt”, очистить от высокочастотных шумов реализацию $\{x_i\}$ из “Практическое занятие 9\Xi.txt”.

Частота дискретизации сигнала 8 кГц. Отобразить исходную – $\{x_i\}$ и отфильтрованную – $\{y_i\}$ реализации на одном графике. Оценить и отобразить графически в логарифмическом масштабе спектры мощности реализаций $\{x_i\}$, $\{y_i\}$. Рассчитать и отобразить на графиках в логарифмическом и линейном масштабах АЧХ используемого фильтра.

- 9.2. Используя рассчитанный в лекции 9 БИХ-фильтр (9.9) очистить от 50 Гц сетевой наводки временной ряд электрокардиограммы $\{x_i\}$ из “Практическое занятие 9\ECG_50Hz.txt”. Частота дискретизации ряда 500 Гц. Отобразить исходную – $\{x_i\}$ и отфильтрованную – $\{y_i\}$ реализации на одном графике. Рассчитать и отобразить графически в логарифмическом масштабе спектры мощности реализаций $\{x_i\}$, $\{y_i\}$. Рассчитать и отобразить на графике в логарифмическом и линейном масштабах АЧХ используемого фильтра.

Список используемых сокращений

Лекция 1

ЦОС	-Цифровая обработка сигналов
DSP	-Digital Signal Processing
ССС	-Сердечно-сосудистая система
ЭКГ	-Электрокардиограмма
ОС	-Операционная система
μController	-Микроконтроллер
ЦСП	-Цифровой сигнальный процессор
DSP	-Digital Signal Processor
Гц	-Герц
АЦП	-Аналого-цифровой преобразователь
ADC	-Analog to digital converter
ЦАП	-Цифро-аналоговый преобразователь
DAC	-Digital to analog converter
RAD	-Rapid Application Development
ООП	-Объектно-ориентированное программирование

Лекция 2

САУ	-Система автоматического управления
КК	-Коэффициент корреляции
АКФ	-Автокорреляционная функция
ККФ	-Кросскорреляционная функция
ЭКГ	-Электрокардиограмма

Лекция 3

ДПФ	-Дискретное преобразование Фурье
-----	----------------------------------

Лекция 4

БПФ	-Быстрое преобразование Фурье
FFT	-Fast Fourier Transform
IDE	-Integrated Development Environment
МНК	-Метод наименьших квадратов

Лекция 5

МНК	-Метод наименьших квадратов
Б	-Бел
Дб	-Децибел
dB	-Decibel

Лекция 6

ФНЧ	-Фильтр низких частот
ФВЧ	-Фильтр высоких частот
РФ	-Режекторный фильтр
ПФ	-Полосовой фильтр

Лекция 7

ИХ	-Импульсная характеристика
КИХ	-Конечная импульсная характеристика
FIR	-Finite impulse response
БИХ	-Бесконечная импульсная характеристика
IIR	-Infinite impulse response
ЦФ	-Цифровой фильтр

Лекция 8

ЧХ	-Частотная характеристика
АЧХ	-Амплитудно-частотная характеристика
ФЧХ	-Фазо-частотная характеристика
ГЗ	-групповая задержка
ГВЗ	-групповое время замедления

Использованные литературные источники

1. Цифровая обработка сигналов. Практический подход. 2-е издание. / Айфичер Э., Джервис Б. Пер. с англ. – М.: Издательский дом “Вильямс”, 2004. – 992 с.
2. Прикладная статистика: исследование зависимостей в 3-х томах. / Айфазян С.А. и др. – М.: «Финансы и статистика», 1985. – 487 с.
3. Цифровая обработка сигналов. / Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. М.: «Радио и связь», 1990. – 256 с.
4. Децибелы. / Зельдин Е.А. М.: «Энергия», 1977. – 64 с.
5. Аналоговые и цифровые фильтры: расчет и реализация. / Лем Г. М.: «МИР», 1982. – 592 с.
6. Применение цифровой обработки сигналов. / Оппенгейм Э. М.: «МИР», 1980. – 552 с.
7. Теория и применение цифровой обработки сигналов. / Отнес Р.К., Энексон Л. М.: «МИР», 1982. – 429 с.
8. Теория и применение цифровой обработки сигналов. / Рабинер Л., Голд Б. М.: «МИР», 1978. – 848 с.
9. Обработка сигналов. Первое знакомство. / Сато Ю. Омск: «Додека», 2001. – 175 с.
10. Методы обработки временных рядов. Учебное пособие. / Хованов И.А., Хованова Н.А. Саратов: Изд-во ГосУНЦ “Колледж”, 2001. – 120 с.

**More
Books!** 



yes
I want morebooks!

Покупайте Ваши книги быстро и без посредников он-лайн - в одном из самых быстрорастущих книжных он-лайн магазинов!

Мы используем экологически безопасную технологию "Печать-на-Заказ".

Покупайте Ваши книги на
www.morebooks.de

Buy your books fast and straightforward online - at one of the world's fastest growing online book stores! Environmentally sound due to Print-on-Demand technologies.

Buy your books online at
www.morebooks.de

SIA OmniScriptum Publishing
Brivibas gatve 1 97
LV-103 9 Riga, Latvia
Telefax: +371 68620455

info@omniscrptum.com
www.omniscrptum.com

OMNIscriptum



